







ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME VI. – ANNÉE 1892.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR UNE

CLASSE DE SURFACES MINIMA,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

I.

Riemann a découvert [1] des surfaces minima engendrées par un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même et montré que la théorie de ces surfaces se rattache de fort près au théorème d'addition des fonctions elliptiques. D'une manière générale, le problème de trouver des surfaces minima passant par un cercle revient à chercher deux fonctions analytiques telles que, la somme des arguments restant constante, il en résulte une relation d'une certaine forme entre les fonctions elles-mêmes.

Nous partons des formules de M. Weierstrass :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-u^2)\mathcal{F}(u)\,du + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv, \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1+u^2)\mathcal{F}(u)\,du - \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1-v^2)\mathcal{G}(v)\,dv, \\ z = \displaystyle\int u\,\mathcal{F}(u)\,du + \displaystyle\int v\,\mathcal{G}(v)\,dv. \end{cases}$$

Cherchons la condition pour que la surface contienne un cercle dont le

[1] *Œuvres complètes*, p. 311.

plan soit parallèle au plan des xy. Soit $z = c$ l'équation du plan de ce cercle, R son rayon. Les valeurs de u et de v relatives à un point de ce cercle satisfont à la relation

$$(2) \qquad \int u\mathcal{F}(u)du + \int v\mathcal{G}(v)\,dv = c,$$

laquelle doit être équivalente à l'équation obtenue en exprimant que la section de la surface par le plan $z = c$ a un rayon de courbure constant et égal à R. Posons

$$(3) \qquad \int u\,\mathcal{F}(u)\,du = c - \int v\mathcal{G}(v)dv = \zeta.$$

Un élément d'arc de la courbe est donné par la formule

$$(4) \qquad d\sigma = (1+uv)\sqrt{\mathcal{F}(u)\mathcal{G}(v)du\,dv},$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$d\sigma = \pm i\frac{1+uv}{\sqrt{uv}}d\zeta;$$

α étant l'angle que fait la tangente avec l'axe des x, on a

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\alpha = i\frac{(1+u^2)\mathcal{F}(u)\,du - (1+v^2)\mathcal{G}(v)\,dv}{(1-u^2)\mathcal{F}(u)du + (1-v^2)\mathcal{G}(v)dv} = i\frac{v+u}{v-u},$$

$$(6) \qquad d\alpha = i\frac{u\,dv - v\,du}{2uv} = -i\frac{u^2\mathcal{F}(u) + v^2\mathcal{G}(v)}{2u^2v^2\mathcal{F}(u)\mathcal{G}(v)}d\zeta,$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \mathrm{R} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}(1+uv)\mathcal{F}(u)\mathcal{G}(v)}{u^2\mathcal{F}(u) + v^2\mathcal{G}(v)};$$

posons

$$(7) \qquad u = \varphi^2(\zeta), \qquad v = \psi^2(c-\zeta),$$

il vient

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\varphi^3(\zeta)\,\varphi'(\zeta)},$$

et l'équation (7) devient

$$(8) \qquad \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} + \frac{\psi'(c-\zeta)}{\psi(c-\zeta)} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left\{\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta) + [\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)]^{-1}\right\}.$$

C'est à la détermination des fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ jouissant de la pro-

priété exprimée par l'équation (8) que revient essentiellement le problème de faire passer une surface minima par un cercle donné. Les coordonnées d'un point de la surface s'expriment alors en fonction de deux paramètres arbitraires ζ et η par les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} x + iy = -\int \varphi^2(\zeta)\,d\zeta + \int \dfrac{d\eta}{\psi^2(\eta)}, \\ x - iy = \int \dfrac{d\zeta}{\varphi^2(\zeta)} - \int \psi^2(\eta)\,d\eta, \\ z = \zeta + \eta, \end{cases}$$

La formule bien connue d'addition des fonctions elliptiques peut s'écrire

$$(10)\qquad ik\,\mathrm{sn}(\zeta+\eta) = \frac{\mathrm{cn}\zeta\,\mathrm{dn}\zeta\,\mathrm{sn}^{-1}\zeta + \mathrm{cn}\eta\,\mathrm{dn}\eta\,\mathrm{sn}^{-1}\eta}{ik\,\mathrm{sn}\zeta\,\mathrm{sn}\eta + (ik\,\mathrm{sn}\zeta\,\mathrm{sn}\eta)^{-1}},$$

et, en prenant $\varphi(\zeta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\zeta$, $\psi(\eta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\eta$, la formule (10) se ramène à la formule (8) et montre que les sections de la surface minima par des plans parallèles au plan des xy sont *toutes des cercles*. On a ainsi la surface cerclée de Riemann.

II.

On peut satisfaire à l'équation (8) par des fonctions plus simples que celles de Riemann. Posons

$$(11)\qquad \varphi(\zeta) = \lambda\frac{\zeta - a}{\zeta - b}e^{k\zeta}, \qquad \psi(\eta) = \lambda'\frac{\eta - a'}{\eta - b'}e^{k\eta},$$

les constantes contenues dans les fonctions (11) devront être telles que ces fonctions vérifient l'identité (8), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2k + \frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - b} + \frac{1}{c - \zeta - a'} - \frac{1}{c - \zeta - b'} \\ = \frac{1}{R}\left[\lambda\lambda'\frac{(\zeta-a)(c-\zeta-a')}{(\zeta-b)(c-\zeta-b')}e^{kc} + \frac{1}{\lambda\lambda'}\frac{(\zeta-b)(c-\zeta-b')}{(\zeta-a)(c-\zeta-a')}e^{-kc}\right]. \end{aligned}$$

En exprimant que les deux membres ont même valeur pour ζ infini et en égalant les résidus des deux membres par rapport aux pôles a, b, $c - a'$, $c - b'$, on obtient des équations faciles à résoudre et qui donnent finalement le résultat suivant.

Pour obtenir des surfaces réelles, on attribue à k une valeur réelle, extérieure à $-\frac{1}{R}$ et $+\frac{1}{R}$; la valeur de $\lambda\lambda'$ est déterminée par l'équation

$$2kR = \lambda\lambda' e^{kc} + \frac{1}{\lambda\lambda'} e^{-kc},$$

elle est réelle; les modules de λ et de λ' seront tous deux égaux à $\sqrt{\lambda\lambda'}$ et l'on pourra prendre arbitrairement la valeur absolue de leurs arguments, qui seront égaux et de signes contraires : δ étant une quantité réelle arbitraire, on aura

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} + i\delta,\\ a' &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} - i\delta,\\ b &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^3\lambda'^3 e^{3kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} + i\delta,\\ b' &= \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^3\lambda'^3 e^{3kc} R}{\lambda^4\lambda'^4 e^{4kc} - 1} - i\delta, \end{aligned}\right\} \quad a + b' = b + a'.$$

Les intégrations indiquées dans les équations (9) peuvent s'effectuer et la surface minima peut se représenter par les équations

$$\begin{aligned} x + iy &= -\frac{\lambda^2}{2k}\,\frac{\zeta - 2a + b}{\zeta - b}\,e^{2k\zeta} - \frac{1}{2k\lambda'^2}\,\frac{\eta - 2b' + a'}{\eta - a'}\,e^{2k\eta},\\ x - iy &= -\frac{1}{2k\lambda^2}\,\frac{\zeta - 2b + a}{\zeta - a}\,e^{-2k\zeta} - \frac{\lambda'^2}{2k}\,\frac{\eta - 2a' + b'}{\eta - b'}\,e^{2k\eta},\\ z &= \zeta + \eta, \end{aligned}$$

ζ et η étant deux quantités imaginaires conjuguées. Si l'on a

$$\zeta + \eta = a + b' = b + a',$$

uv est constant. Il en résulte que le plan $z = a + b'$ coupe la surface *sous un angle constant.*

L'emploi des fonctions elliptiques donne des résultats analogues. Considérons les expressions

$$\frac{\sigma(c - b - b')\sigma(\zeta - a)\sigma(c - \zeta - a')}{\sigma(c - b - a')\sigma(a - b)\sigma(\zeta - b)\sigma(c - \zeta - b')},$$

$$\frac{\sigma(c - a - a')\sigma(\zeta - b)\sigma(c - \zeta - b')}{\sigma(a - b)\sigma(c - a - b')\sigma(\zeta - a)\sigma(c - \zeta - a')},$$

où σ désigne la fonction de M. Weierstrass [1]. Elles représentent des fonctions doublement périodiques de ζ, si la somme de leurs zéros égale celle de leurs infinis. Cette condition, que nous supposerons réalisée, revient à

$$a - b = a' - b'. \tag{12}$$

En les décomposant en éléments simples, on trouve qu'elles sont respectivement égales à

$$\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} - \frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)} - \frac{\sigma'(c-\zeta-b')}{\sigma(c-\zeta-b')} + \frac{\sigma'(c-a-b')}{\sigma(c-a-b')}$$

et

$$\frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)} + \frac{\sigma'(c-\zeta-a')}{\sigma(c-\zeta-a')} + \frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} - \frac{\sigma'(c-b-a')}{\sigma(c-b-a')}.$$

En remarquant que, d'après la relation (12),

$$c - a - b' = c - b - a',$$

on obtient l'identité

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)} + \frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)} - \frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)} + \frac{\sigma'(c-\zeta-a')}{\sigma(c-\zeta-a')} - \frac{\sigma'(c-\zeta-b')}{\sigma(c-\zeta-b')}, \\ & \quad = \frac{\sigma(c-b-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(c-\zeta-a')}{\sigma(c-b-a')\sigma(a-b)\sigma(\zeta-b)\sigma(c-\zeta-b')} \\ & \quad + \frac{\sigma(c-a-a')\sigma(\zeta-b)\sigma(c-\zeta-b')}{\sigma(a-b)\sigma(c-a-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(c-\zeta-a')}, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut ramener à l'identité (8) en posant

$$\mathrm{R} = \frac{\sigma(a-b)\sigma(c-a-b')}{\sqrt{\sigma(c-b-b')\sigma(c-a-a')}},$$

$$\varphi(\zeta) = \lambda\frac{\sigma(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-b)}e^{\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \psi(\zeta) = \lambda'\frac{\sigma(\zeta-a')}{\sigma(\zeta-b')}e^{\zeta\frac{\sigma(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

λ et λ' étant déterminés par les égalités

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\,e^{i\mu-\frac{c}{2}\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \lambda' = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\,e^{-i\mu-\frac{c}{2}\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

où μ est une constante arbitraire.

---

[1] Je suis ici les notations du Livre de M. Weber : *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen.*

Les intégrations indiquées dans les formules (9) peuvent s'effectuer. Je dis que

$$\varphi^2(\zeta) = D_\zeta\left[\lambda^2 \frac{\sigma^2(a-b)}{\sigma(2a-2b)}\,\frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)}\,e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}\right],$$

soit, pour abréger,

$$Q(\zeta) = \frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)}\,e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}.$$

On a

$$Q(\zeta+\omega_1) = Q(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}},$$

donc aussi

$$Q'(\zeta+\omega_1) = Q'(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}$$

et

$$\varphi^2(\zeta+\omega_1) = \varphi^2(\zeta)\,e^{4\eta_1(b-a)+2\omega_1\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}.$$

Donc $\dfrac{Q'(\zeta)}{\varphi^2(\zeta)}$ reste invariable quand on ajoute ω_1 à l'argument; on vérifie de même qu'il ne change pas lorsque l'on ajoute ω_2. Cette fonction ne peut d'ailleurs avoir pour pôle que a et ses homologues. Or a n'est pas un pôle; en effet,

$$\sigma(\zeta-2a+b) = \sigma(b-a)+(\zeta-a)\sigma'(b-a)+\frac{(\zeta-a)^2}{2}\sigma''(b-a)+\ldots,$$

$$\sigma(\zeta-b) = \sigma(a-b)+(\zeta-a)\sigma'(a-b)+\frac{(\zeta-a)^2}{2}\sigma''(a-b)+\ldots,$$

et, en faisant le quotient des deux séries

$$\frac{\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(\zeta-b)} = -1+2(\zeta-a)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}-2(\zeta-a)^2\frac{\sigma'^2(a-b)}{\sigma^2(a-b)}+\ldots,$$

on a aussi

$$e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}} = e^{2a\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}\left[1+2(\zeta-a)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}+2(\zeta-a)^2\frac{\sigma'^2(a-b)}{\sigma^2(a-b)}+\ldots\right].$$

En effectuant le produit, on voit que $Q(\zeta)$ ne contient ni termes en $\zeta-a$, ni termes en $(\zeta-a)^2$, donc $\zeta=a$ est un zéro double de $Q'(\zeta)$. Par suite, la fonction $\dfrac{Q'(\zeta)}{\varphi^2(\zeta)}$ est doublement périodique, n'a pas de pôles et se réduit à une constante; en faisant $\zeta=b$, on obtient la valeur de cette constante.

En faisant les intégrations des formules (9), il vient

$$(14)\quad \begin{cases} x+iy=-\lambda^2\,\dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\zeta-2a+b)}{\sigma(2a-2b)\sigma(\zeta-b)}e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}-\dfrac{1}{\lambda'^2}\,\dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\eta-2b'+a')}{\sigma(2a-2b)\sigma(\eta-a')}e^{-2\eta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \\ x-iy=-\dfrac{1}{\lambda^2}\,\dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\zeta-2b+a)}{\sigma(2a-2b)\sigma(\zeta-a)}e^{-2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}-\lambda'^2\dfrac{\sigma^2(a-b)\sigma(\eta-2a'+b')}{\sigma(2a-2b)\sigma(\eta-b')}e^{2\eta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \\ z=\zeta+\eta. \end{cases}$$

Le plan $z=c$ coupe la surface suivant un cercle; il n'en est pas de même, en général, des autres plans parallèles au plan des xy. Mais les sections de la surface par ces plans jouissent d'une propriété qui les rapproche d'un cercle. *Il existe entre leur courbure proprement dite et leur courbure géodésique une relation linéaire.*

En effet, si dans l'identité (13) on remplace c par z, il vient

$$\begin{aligned} &2\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}+\frac{\sigma'(\zeta-a)}{\sigma(\zeta-a)}-\frac{\sigma'(\zeta-b)}{\sigma(\zeta-b)}+\frac{\sigma'(z-\zeta-a')}{\sigma(z-\zeta-a')}-\frac{\sigma'(z-\zeta-b')}{\sigma(z-\zeta-b')} \\ &\quad=\frac{\sigma(z-b-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(z-\zeta-a')}{\sigma(z-b-a')\sigma(a-b)\sigma(\zeta-b)\sigma(z-\zeta-b')} \\ &\quad\quad+\frac{\sigma(z-a-a')\sigma(\zeta-b)\sigma(z-\zeta-b')}{\sigma(a-b)\sigma(z-a-b')\sigma(\zeta-a)\sigma(z-\zeta-a')}, \end{aligned}$$

ou

$$(15)\qquad \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}+\frac{\psi'(c-\zeta)}{\psi(c-\zeta)}=\rho\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)+\rho'[\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)]^{-1},$$

en désignant par ρ et ρ' les quantités

$$\begin{aligned} \rho&=\frac{\sigma(z-b-b')\sqrt{\sigma(c-a-a')}}{\sigma(z-b-a')\sigma(a-b)\sqrt{\sigma(c-b-b')}}\,e^{(c-z)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \\ \rho'&=\frac{\sigma(z-a-a')\sqrt{\sigma(c-b-b')}}{\sigma(z-a-b')\sigma(a-b)\sqrt{\sigma(c-a-a')}}\,e^{(z-c)\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}. \end{aligned}$$

Mais le rayon de courbure de la section est, en général, donné par la formule (8) et, en divisant membre à membre les formules (8) et (15), il vient

$$\mathrm{R}=\frac{\rho uv+\rho'}{uv+1};$$

Les intégrations indiqu

dis que

$\varphi^2(\zeta) = D$

soit, pour abréger,

On a

plan $z = a + b'$ coupe

plans qui donnent des

constant.

du théorème de Rie-

simples de la fonction

donc aussi

et

Donc

de m

d'ail

en

SUR LES

COURBES SYNCHRONES,

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

On trouve dans la *Mécanique d'Euler* (t. II, p. 47) l'énoncé du problème suivant :

Soient une infinité de courbes semblables AM *prenant leur origine en un point fixe* A, *trouver une courbe* CMM *déterminant sur toutes ces courbes des arcs* AM *qui sont parcourus dans des temps égaux par un point matériel pesant descendant sur chacune d'elles et partant de* A *sans vitesse initiale* (*courbes synchrones*).

Comme application de sa méthode, Euler traite complètement le cas particulier bien connu des lignes droites émanant de l'origine; la courbe synchrone est, comme on sait, une circonférence. Il aborde ensuite les deux cas particuliers où les courbes sont des circonférences et des cycloïdes et l'équation différentielle de la courbe synchrone à laquelle il arrive est tellement compliquée qu'il paraît impossible de l'intégrer.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de traiter ce problème difficile par une méthode différente qui nous permettra de trouver les courbes synchrones dans un grand nombre de cas, et en supposant le point soumis à des forces qui satisfont à une fonction potentielle.

La méthode s'applique aux courbes tracées sur des surfaces.

Nous définirons les courbes en donnant l'expression de leurs coordonnées en fonction d'un paramètre variable.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f_1(u, a), \\ y = f_2(u, a) \end{cases}$$

les équations des courbes de la famille, u désignant le paramètre variable et a une constante arbitraire.

Soit φ la fonction des forces, on a l'intégrale des forces vives

$$v^2 = 2\varphi(x, y) = 2\varphi(u, a); \tag{2}$$

on supposera $\varphi = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$.

On tire des équations des courbes (1)

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial u}\, du,$$

$$dy = \frac{\partial f_2}{\partial u}\, du,$$

$$ds = du \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2};$$

de (2), on tire

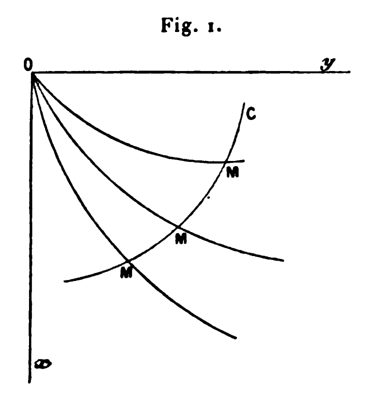
$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\varphi}}, \qquad t = \int \frac{ds}{\sqrt{2\varphi}},$$

$$\sqrt{2}\, t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2}}{\sqrt{\varphi}}\, du.$$

Cette intégrale devra être prise entre des limites telles qu'elle s'annule pour une valeur de u correspondant à l'origine.

Il faut que t soit le même pour tous les parcours sur les arcs AM, quelle

Fig. 1.



que soit la courbe que décrit le point matériel pour atteindre la courbe CMM (*fig.* 1). Or t est fonction de u et de a, et l'on exprime que ce temps

est constant en écrivant que sa différentielle totale est nulle,

$$\frac{\partial t}{\partial u}\,du + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0. \tag{4}$$

En éliminant a entre (1) et (4), on aura les équations de la courbe synchrone.

Exemple I. — *La force est la pesanteur et l'axe* AX *est dirigé suivant la verticale; les lignes* AM *sont des lignes droites passant par l'origine.* (Euler.)

Soient

$$x = u^2,$$
$$y = au^2$$

les équations de ces droites

$$\varphi = \sqrt{2gx},$$
$$ds = 2\sqrt{1+a^2}\,u\,du;$$

posons

$$t\sqrt{2g} = t_1,$$

il vient

$$t_1 = 2\sqrt{1+a^2}\int_0^u du.$$

Différentions et égalons à 0 la différentielle totale

$$\sqrt{1+a^2}\,du + \frac{a\,da}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^u du = 0. \tag{4 bis}$$

Mais nous remarquerons que chaque courbe CMM correspond à une valeur particulière de t_1, que pour chacune de ces courbes on doit considérer t_1 ou $2\sqrt{1+a^2}\int du$ comme une constante et, par conséquent, on pourra remplacer $\int_0^u du$ par l'expression équivalente $\frac{t_1}{2\sqrt{1+a^2}}$, dans laquelle on traitera t_1 comme une constante. En substituant cette valeur dans l'expression précédente, on trouve

$$\frac{t_1\,a\,da}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\,du = 0.$$

Intégrant, on trouve

$$\frac{t_1}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} = 2u + C;$$

la constante C est nulle, car, pour $u = 0$, $t_1 = 0$. En tirant de cette équation la valeur de a et la portant dans les deux équations des lignes droites, on a, pour la courbe synchrone,

$$x^2 = u^4,$$

$$y^2 = \frac{t_1^2}{4} u^2 - u^4,$$

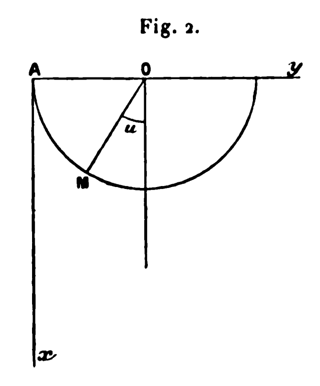
ou, en éliminant u,

$$x^2 + y^2 = \frac{t_1^2}{4} x;$$

c'est un résultat bien connu et si nous avons donné un tel développement à la solution de cet exemple très simple, c'est pour indiquer l'esprit de la méthode qui va nous permettre de résoudre des problèmes beaucoup plus compliqués (¹).

Exemple II. — *La force est la pesanteur et les courbes* AM (Euler)

Fig. 2.



(*fig.* 2) *sont des cercles dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Prenons, pour paramètre variable, l'angle u que fait le rayon du cercle

(¹) Dans ce cas simple, on aurait pu intégrer immédiatement l'équation (4 *bis*) qui aurait donné $a^2 = \frac{C}{u^2} - 1$, et, en remplaçant dans les équations (1), on aurait trouvé

$$y^2 + x^2 = Cx.$$

avec la verticale, les équations de ces cercles sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a(1-\sin u); \end{cases}$$

on a

$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

On trouve immédiatement

$$t\sqrt{2g} = t_1 = \sqrt{a}\int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos u}}.$$

L'équation différentielle totale sera, en remarquant que $\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{t_1}{\sqrt{a}}$,

$$\frac{t_1 a^{-\frac{3}{2}} da}{2} = \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{du}{\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{u}{2}}},$$

d'où, en intégrant,

$$t_1 a^{-\frac{1}{2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \mathrm{F}(u),$$

d'où

$$a = \frac{t_1^2}{\mathrm{F}^2(u)}.$$

Par conséquent, les équations de la courbe synchrone sont

$$x = \frac{t_1^2 \cos u}{\mathrm{F}^2(u)},$$

$$y = \frac{t_1^2(1-\sin u)}{\mathrm{F}^2(u)}.$$

On voit que les coordonnées d'un point de la courbe synchrone s'expriment au moyen d'une intégrale elliptique.

On remarquera qu'il entre dans ces équations un paramètre arbitraire t_1, de sorte que nous avons une famille de courbes synchrones correspondant à la famille de cercles.

Exemple III. — *La force est encore la pesanteur et les courbes sont des cycloïdes.* (Euler.)

Soient

$$x = a(1 - \cos u),$$
$$y = a(u - \sin u)$$

les équations des cycloïdes, le paramètre arbitraire a désignant le diamètre du cercle générateur.

On a

$$ds = 2a \sin \frac{u}{2} du,$$

$$t\sqrt{2g} = t_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\sqrt{a} \int du.$$

L'équation

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} du + \frac{\partial t_1}{\partial a} da = 0 \quad (^1)$$

prend la forme, toutes réductions faites, après avoir remplacé $\sqrt{2a}\int du$ par t_1,

$$du + \frac{t_1}{2\sqrt{2}} a^{\frac{3}{2}} da = 0.$$

Intégrons et remarquons que la constante est nulle, car pour $u = 0$ on a $t_1 = 0$, on a

$$u = \frac{t_1}{\sqrt{2a}},$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{t_1^2}{2u^2},$$

et, remplaçant a par cette valeur dans les équations de la cycloïde, on a pour la courbe synchrone

$$x = \frac{t_1^2}{2} \frac{1 - \cos u}{u^2},$$

$$y = \frac{t_1^2}{2} \frac{u - \sin u}{u^2}.$$

On voit aisément que les courbes synchrones forment un système orthogonal au système des cycloïdes.

Ces trois exemples sont les seuls qui ont été traités par Euler (*loc. cit.*).

---

(1) Dans ce cas particulier, l'équation différentielle totale $\frac{du}{u} + \frac{da}{2a} = 0$ s'intègre immédiatement et donne $a = \frac{C}{u^2}$, C désignant une constante.

Cas des forces centrales.

Supposons que les courbes soient des cercles représentés par les équations

$$x = a\cos u,$$
$$y = a(1 - \sin u) \qquad (\textit{voir}\ \text{plus haut});$$

si l'on désigne par r le rayon vecteur partant de l'origine, on a

$$r = \sqrt{2}\,a(1 - \sin u)^{\frac{1}{2}}.$$

On a aussi

$$ds = -a\,du.$$

Supposons que la force centrale R soit proportionnelle à la distance et posons

$$R = k^2 r,$$
$$v^2 = 2\int R\,dr = k^2 r^2,$$

d'où

$$dt = \frac{ds}{v} = -\frac{a\,du}{kr},$$
$$t = -\frac{a}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{2}\,a(1 - \sin u)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{k\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{1 - \sin u}}.$$

La durée du parcours du point matériel depuis l'origine jusqu'à un point M correspondant à une valeur donnée de u étant indépendante de a, la courbe synchrone, dans ce cas particulier, est une droite passant par l'origine; cette droite coupe tous les cercles sous le même angle. On obtient son équation en regardant u comme constant dans les équations des cercles et en éliminant a. On trouve

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right).$$

Autre exemple. — Soit $R = k^2 r^m$,

$$v^2 = 2\int R\,dr = \frac{2k^2 r^{m+1}}{m+1}.$$

on trouve aisément, en considérant la même famille de cercles,

$$t = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{m+1}} r^{\frac{m+1}{2}}} = -\frac{\sqrt{m+1}}{k 2^{\frac{m+2}{2}}} a^{\frac{1-m}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

En posant $m = 1$, on trouve que t est indépendant de a : c'est le cas particulier traité précédemment.

On peut écrire l'expression de t sous la forme suivante, en désignant par A une constante,

$$t = \mathrm{A} a^{\frac{1-m}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

On forme facilement les expressions de $\frac{\partial t}{\partial u}$ et de $\frac{\partial t}{\partial a}$, et, en les substituant dans l'équation

$$\frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial a} da = 0,$$

on a

$$\frac{a^{\frac{1-m}{2}} du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} + \frac{1-m}{2} a^{-\frac{1+m}{2}} da \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} = 0.$$

Or, pour chacune des courbes synchrones, la valeur de t doit être considérée comme constante et l'on pourra remplacer dans l'équation précédente

$$\int \frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}$$

par

$$\frac{t}{\mathrm{A}} a^{\frac{m-1}{2}},$$

et l'on obtient, toutes réductions effectuées,

$$\frac{\mathrm{A}\, du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} + \frac{1-m}{2} t a^{\frac{m-3}{2}} da = 0.$$

Intégrons, on aura, en résolvant par rapport à a,

$$a^{\frac{m-1}{2}} = \frac{\mathrm{A}}{t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

Cas particulier : $m = -1$. — On a

$$a = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et les équations des courbes synchrones sont

$$x = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)} \cos u,$$

$$y = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)} (1 - \sin u).$$

Formule générale.

Nous allons maintenant donner une formule générale qui comprend, outre les cas précédents, un grand nombre de cas nouveaux.

Si le paramètre a, qui entre dans l'équation des courbes semblables, représente une longueur, l'équation des courbes sera homogène entre x, y, a. On pourra toujours, et cela d'une infinité de manières, écrire sous la forme suivante les deux équations de la courbe

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a f_1(u), \\ y = a f_2(u), \end{cases}$$

u étant un paramètre variable, f_1 et f_2 étant des fonctions données de ce paramètre. Supposons que la fonction des forces soit aussi une fonction homogène des coordonnées, on pourra écrire

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a^m f_1^m \varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

Comme on peut appliquer le principe des forces vives,

$$v^2 = 2\varphi,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\sqrt{\varphi},$$

$$\sqrt{2}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{\varphi}},$$

$$t_1 = t\sqrt{2} = a^{\frac{2-m}{2}} \int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} du}{f_1^{\frac{m}{2}} \left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

l'intégrale devant être prise entre des limites telles que le temps t soit nul à l'origine.

Posons

$$\int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} du}{f_1^{\frac{m}{2}} \left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]} = \psi(u).$$

On aura

$$(3) \qquad t_1 = a^{\frac{2-m}{2}} \psi(u).$$

On tire de là

$$\frac{\partial t_1}{\partial a} = \frac{2-m}{2} a^{-\frac{m}{2}} \psi(u), \qquad \frac{\partial t_1}{\partial u} = a^{\frac{2-m}{2}} \psi'(u);$$

remplaçons dans l'équation différentielle totale

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} du + \frac{\partial t_1}{\partial a} da = 0,$$

il vient

$$(4) \qquad a^{1-\frac{m}{2}} \psi'(u) du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) a^{-\frac{m}{2}} \psi(u) da = 0.$$

Les équations de la courbe synchrone résultent de l'élimination de a entre (1) et (4). Si nous remarquons que la durée du parcours du point matériel sur l'arc de courbe compris entre l'origine et la courbe synchrone est constant, on aura, d'après (3),

$$\psi(u) = a^{\frac{m-2}{2}} t_1,$$

formule dans laquelle t_1 ou $t\sqrt{2}$ doit être considéré comme une constante. Remplaçons $\psi(u)$ par cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra

$$a^{1-\frac{m}{2}} \psi'(u) du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) t_1 a^{-1} da = 0$$

ou

$$\psi'(u) du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) t_1 a^{\frac{m}{2}-2} da = 0.$$

Intégrons, on aura

$$\psi(u) = t_1 a^{\frac{m}{2}-1},$$

$$a = \left[\frac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}};$$

remplaçons a par cette valeur dans les équations (1), on aura pour la courbe synchrone correspondant à cette valeur de t_1

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \left[\dfrac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_1(u), \\ y = \left[\dfrac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_2(u). \end{cases}$$

On arriverait au même résultat en observant que l'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{\psi'(u)\,du}{\psi(u)} = \frac{m-2}{2}\,\frac{da}{a},$$

d'où, en intégrant et désignant par C une constante arbitraire,

$$a^{\frac{m-2}{2}} = C\psi(u),$$

et

$$a = [C\psi(u)]^{\frac{2}{m-2}}.$$

On voit que la constante C est l'inverse de la constante t_1.

Les équations (5) définissent une famille de courbes synchrones correspondant aux trajectoires du point matériel.

Courbes synchrones sur les surfaces.

La méthode précédente permet de trouver les courbes synchrones sur les surfaces. Nous supposerons que chaque point de la surface est défini par l'intersection de deux courbes appartenant à des systèmes orthogonaux définis par deux paramètres r et ψ et que l'élément linéaire est représenté par la formule

$$(1)\qquad ds^2 = f^2\,dr^2 + g^2\,d\psi^2,$$

f et g étant des fonctions données de ψ et r; soit

$$(2)\qquad F(r, \psi, a) = 0$$

l'équation d'une famille de courbes tracées sur la surface en question, a représentant une constante arbitraire. Supposons que les courbes précédentes partent toutes d'un même point de cette surface et qu'elles soient les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces telles qu'il existe une fonction potentielle φ. On aura

$$v^2 = \varphi,$$

φ étant une fonction donnée de r et ψ. On tirera de là

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi},$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{\varphi}}.$$

Mais, si l'on différentie l'équation (2), on a

$$\frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \psi} d\psi = 0,$$

d'où

$$d\psi = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial \psi}} dr;$$

remplaçons dans l'expression (1) de ds, on aura, en tenant compte de (2)

$$ds = \chi(r)\, dr,$$

φ pourra aussi être considéré comme une fonction de r seulement, en vertu de l'équation (2), et l'on pourra écrire

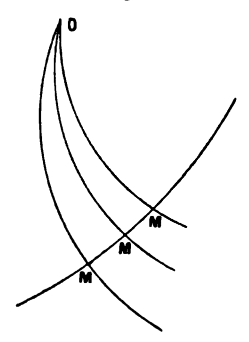
$$(3) \qquad t = \int F(r, a)\, dr.$$

En raisonnant comme dans le cas des courbes planes, on verrait que l'équation des courbes synchrones correspondant aux courbes du système (2) et à cette loi particulière de la force sera donnée par l'élimination de la constante arbitraire a entre l'équation (2) et l'équation différentielle totale

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\partial t}{\partial a} da = 0.$$

APPLICATION. — *Soit à trouver les courbes synchrones correspondant à une famille de courbes géodésiques tracées sur une surface de révo-*

Fig. 3.



lutiou à partir d'un point donné, parcourues par un point matériel soumis à l'action d'une force donnée (*fig.* 3).

Soit

$$ds^2 = du^2 + r^2 d\psi^2 \tag{1}$$

l'expression de l'élément linéaire, r désignant le rayon du parallèle, ψ l'angle formé par un méridien quelconque avec un méridien pris pour origine, u la longueur de l'arc du méridien, u étant lié à r par la relation

$$u = f(r),$$

qui définit la courbe méridienne.

On peut mettre sous la forme suivante l'équation des courbes géodésiques

$$d\psi = \frac{a\,du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{a f'(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}, \tag{2}$$

a désignant une constante arbitraire (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*).

Si l'on appelle i l'angle formé par une de ces courbes avec le méridien on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{r\,d\psi}{du} = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

et l'on voit que a représente le rayon d'un parallèle auquel les géodésiques sont tangentes.

Considérons toutes les géodésiques passant par un point donné sur la surface et que l'on obtient en faisant varier la constante a; regardons-les

comme les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces données telles qu'il existe une fonction potentielle φ.

On trouve aisément pour l'expression de l'élément linéaire d'une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution

$$ds = \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - a^2}};$$

de $v^2 = \varphi$, on tire

$$(3) \qquad t = \int \frac{ds}{\sqrt{\varphi}} = \int \frac{r\,du}{\sqrt{\varphi}\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Dans le second membre u est une fonction donnée de r, et φ qui, en général, dépend de r et de ψ peut aussi être considéré comme une fonction de r en tenant compte de l'équation (2). Si l'on suppose effectuée l'intégration dans le second membre, l'équation (3) donnera l'expression de t au moyen de r et de a. On écrira l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial r}\,dr + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0,$$

et les courbes synchrones seront définies par une équation résultant de l'élimination de a entre (2) et (4).

Application. — Considérons le cas particulier suivant

$$(1) \qquad r^2 - u^2 = h^2, \qquad \varphi = \frac{A^2 r^m}{r^2 - h^2}\ (^1), \qquad h \text{ et } A \text{ const.};$$

la surface en question est l'alysséide de Bour.

L'équation différentielle des géodésiques est

$$(2) \qquad d\psi = \frac{a\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}};$$

la longueur de l'arc s'exprime ainsi

$$ds = \frac{r^2\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}}.$$

On a

$$(3) \qquad v^2 = \varphi,$$

$$(4) \qquad t = \int_{r_0}^{r} \frac{r^2\,dr}{\sqrt{\varphi}\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}} = \frac{1}{A}\int_{r_0}^{r} \frac{r^{2-m}\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

---

(1) On suppose que la fonction des forces φ dépend du rayon du parallèle et de la longueur de l'arc du méridien compris entre ce parallèle et le sommet de la surface.

Il faut éliminer a entre l'équation (2) et

$$(5)\qquad \frac{\partial t}{\partial r}\,dr + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0.$$

Ceci posé, introduisons une variable auxiliaire comme nous avons fait pour le mouvement dans un plan; posons

$$(2\ bis)\qquad r = \frac{a}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}),$$

remplaçons r par sa valeur dans l'équation (2), on aura

$$(2\ bis)\qquad d\psi = \frac{2a\,d\theta}{\sqrt{a^2(e^{\theta} + e^{-\theta})^2 - 4h^2}};$$

sous cette forme on a r et ψ exprimés en fonction de θ pour représenter les géodésiques de l'alysséide.

On trouve pour l'expression du temps

$$(4\ bis)\qquad t = \mathrm{B}a^{1-m}\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta,$$

θ et θ_0 correspondant aux valeurs r et r_0.

L'équation (5) sera remplacée par

$$(5\ bis)\qquad \frac{\partial t}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0,$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \mathrm{B}a^{1-m}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}, \qquad \frac{\partial t}{\partial a} = \mathrm{B}(1-m)\,a^{-m}\int(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta,$$

$$a^{1-m}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta + (1-m)a^{-m}da\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = 0.$$

Mais on tire de (4 *bis*)

$$\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{t}{\mathrm{B}}\,a^{m-1},$$

t devant être regardé comme une constante; substituant, on a

$$(5\ ter)\qquad (e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{(m-1)t}{\mathrm{B}}\,a^{m-2}\,da.$$

On peut intégrer et l'on a

$$\int^{\theta}(e^{\theta} + e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{t}{\mathrm{B}}\,a^{m-1} = \chi(\theta),$$

d'où

$$a = \left[\frac{B\chi(\theta)}{t}\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Portons cette valeur de a dans les équations (2 *bis*), nous aurons les équations des courbes synchrones. Ces équations contenant une constante t, on aura une famille de courbes synchrones correspondant aux géodésiques passant par un point donné.

Cas particuliers. — 1° $m = 1$. Ce cas n'est pas compris dans les formules générales. L'équation (4 *bis*) montre que t est indépendant de a : il ne dépend que du paramètre θ. Or le temps que met le mobile pour atteindre la courbe synchrone en partant de l'origine est constant quelle que soit la trajectoire parcourue, et, t étant une fonction de θ seulement, il en résulte que θ est constant.

Donc la courbe synchrone dans ce cas particulier sera définie par les équations (2 *bis*) dans lesquelles on considérera θ comme une constante et a comme un paramètre. On aura l'équation entre r et ψ en éliminant a entre les deux équations

$$\psi = 2a\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2(e^\theta + e^{-\theta})^2 - 4h^2}} = \psi(\theta, a),$$

$$r = \frac{a}{2}(e^\theta + e^{-\theta}).$$

On a traité précédemment un cas particulier analogue à celui-ci.

2° $m = 2$, on a

$$a = \frac{B}{t}(\theta - \theta_0);$$

la substitution de cette valeur de a dans (2 *bis*) donne

$$r = \frac{B}{2t}(\theta - \theta_0)(e^\theta + e^{-\theta}),$$

$$d\psi = \frac{2B(\theta - \theta_0)\,d\theta}{t\sqrt{\frac{B^2}{t^2}(\theta - \theta_0)^2(e^\theta + e^{-\theta})^2 - 4h^2}}.$$

Il est intéressant de remarquer que les formules précédentes ne dépendent que de la forme de l'élément linéaire de la surface de révolution. Donc e[illegible] s'appliquent à des trajectoires tracées sur toutes les surfaces applica[illegible] surfaces de révolution.

SUR

CERTAINES PROPRIÉTÉS D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE

D'UN SYSTÈME,

PAR M. PAUL APPELL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Lorsqu'un système dont les liaisons sont indépendantes du temps est sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces U, la recherche des positions d'équilibre du système se trouve ramenée à la recherche des maxima et minima de cette fonction U regardée comme fonction des paramètres indépendants qui servent à définir la configuration géométrique du système.

En partant de cette propriété bien connue qui est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, on peut, même pour un système sollicité par des forces ne dérivant pas d'une fonction de forces, assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima *dans une position d'équilibre donnée du système*. On obtient ainsi des théorèmes donnant des propriétés de la position d'équilibre considérée, mais ne permettant pas, en général, de trouver cette position, car l'énoncé de ces propriétés suppose connue la position d'équilibre. Nous commencerons par indiquer, en les rattachant au point de vue auquel nous nous plaçons ici, des théorèmes de Lagrange et Möbius.

Considérons un système de points matériels $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$ assujettis à des liaisons données indépendantes du temps et sollicités par des forces directement appliquées, le point M_1, par des forces que nous supposons pour simplifier réduites à une force $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, le point M_2 par une force $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ... Soit, pour ce système, une position d'équilibre déterminée dans laquelle les points M_1, M_2, $\ldots$, M_n occupent des positions déterminées $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de coordonnées (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n), les forces correspondantes étant des forces déterminées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de projections respectives (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2),

A_1, B_1, C_1). Dans ces conditions on a les propositions que nous allons indiquer.

1. Lagrange donne dans sa *Mécanique analytique* (*Statique*, Section I, n° 15 et Section III, § V) une démonstration du principe des vitesses virtuelles qui est fondée sur un principe entrevu par Torricelli (*ibid.*, § 16) et qui conduit à la propriété suivante : Sur la direction de chacune des forces $p_1, p_2, \dots, p_n$ correspondant à la position d'équilibre, marquons un point fixe : nous aurons ainsi n points, O_1 sur p_1, O_2 sur p_2, ... Dans une position voisine de cette position d'équilibre, les points du système occuperont des positions $M_1, M_2, \dots, M_n$. La fonction

$$S = p_1\overline{M_1O_1} - p_2\overline{M_2O_2} - \dots - p_n\overline{M_nO_n},$$

dont chaque terme est la distance d'un point M_i du système au point fixe O_i correspondant multipliée par l'intensité p_i, est *maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée.*

En effet, imaginons que le système, au lieu d'être sollicité par les forces données $P_1, P_2, \dots, P_n$, soit sollicité par des forces $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$, la force P'_i appliquée au point M_i étant égale à la constante p_i et dirigée vers le point fixe O_i : sous l'action de ces nouvelles forces le système sera encore en équilibre dans la position déterminée que nous avons considérée, car dans cette position déterminée les nouvelles forces $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ deviennent, d'après leur définition, égales à ce que deviennent $P_1, P_2, \dots, P_n$ dans cette même position. Mais ce nouveau système de forces $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ dérive de la fonction des forces

$$-p_1\overline{M_1O_1} - p_2\overline{M_2O_2} - \dots - p_n\overline{M_nO_n},$$

car le travail virtuel de la force P'_i d'intensité constante p_i dirigée vers le point fixe O_i est $-p_i\,\delta\overline{M_iO_i}$. La position d'équilibre considérée rend donc en général maximum ou minimum cette fonction des forces, c'est-à-dire S, et dans tous les cas elle annule la variation de S.

Bien entendu, la réciproque n'est pas exacte, en ce sens que toute position du système pour laquelle la variation de S est nulle est une position d'équilibre du système sous l'action des nouvelles forces $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$, *mais non sous l'action des forces primitivement données* $P_1, P_2, \dots, P_n$; la propriété énoncée est donc spéciale à la position d'équilibre particulière

que nous avons envisagée au début et qui nous a servi à définir les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Il est important de remarquer aussi que la position d'équilibre considérée qui est commune aux systèmes de forces $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ peut être stable dans l'un des systèmes de forces et instable dans l'autre. Lagrange montre que l'on peut réaliser ce second système de forces à l'aide de poids et de poulies, mais c'est là un point particulier qu'il est inutile de développer ici.

Prenons un exemple entièrement élémentaire. Imaginons un point libre M sollicité par trois forces, *toutes d'égale intensité*, mais de directions différentes. Ce point sera en équilibre dans une position m pour laquelle les trois forces formeront entre elles, deux à deux, des angles tous égaux à 120°. Prenons alors, sur la direction de ces trois dernières forces, trois points fixes O_1, O_2, O_3, le point m se trouvera parmi les positions du point M qui rendent minimum la somme

$$\overline{MO_1} + \overline{MO_2} + \overline{MO_3}.$$

Un calcul facile montre d'ailleurs que ce point m est le seul qu'on trouve en cherchant à rendre cette somme minimum.

II. Dans son *Traité de Statique*, Möbius suppose presque toujours que les forces agissant sur un système sont *constantes en grandeur, direction et sens*. Ce cas se présenterait pour les forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, si les points appelés précédemment $O_1, O_2, \ldots, O_n$ étaient éloignés indéfiniment sur les directions des forces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dans la position d'équilibre considérée. Les projections de p_i étant A_i, B_i, C_i, celles de P'_i qui est égale et parallèle à p_i auront les mêmes valeurs; le système des forces P′ dérivera alors de la fonction des forces

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} (A_i x_i + B_i y_i + C_i z_i),$$

qui remplacera la fonction appelée précédemment S et qui, par suite, sera encore, en général, maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée.

III. *Principe du minimum de la somme des carrés des distances.* — Voici une autre propriété de l'équilibre qui a été indiquée par Möbius et

qui se rattache au même ordre d'idées (¹). Le système étant en équilibre dans les positions $m_1, m_2, \ldots, m_n$ où les forces sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prenons, à partir du point m_1, sur la direction de la force p_1, une longueur $\overline{m_1 O_1}$ égale à $\frac{p_1}{k}$, à partir de m_2 sur la direction de p_2 une longueur $\overline{m_2 O_2}$ égale à $\frac{p_2}{k}$, $\ldots$, k désignant une constante différente de zéro. Considérant ensuite une position quelconque $M_1, M_2, \ldots, M_n$ du système, faisons agir sur les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dirigées respectivement suivant les droites $\overline{M_1 O_1}, \overline{M_2 O_2}, \ldots, \overline{M_n O_n}$ et égales à $k\overline{M_1 O_1}$, $k\overline{M_2 O_2}$, $k\,\overline{M_n O_n}$. Sous l'action de ces nouvelles forces, le système est encore en équilibre dans la même position $m_1, m_2, \ldots, m_n$, car dans cette position spéciale les forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ coïncident avec $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Comme le nouveau système de forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ dérive de la fonction des forces

$$T = -k\left(\overline{M_1 O_1}^2 + \overline{M_2 O_2}^2 + \ldots + \overline{M_n O_n}^2\right),$$

on voit que la position d'équilibre considérée rend cette fonction maximum ou minimum en général, et que, dans tous les cas, la variation de la fonction T s'annule pour cette position d'équilibre.

Voilà donc encore une propriété de l'équilibre qui est analogue à celle du nº I et qui conduit aux mêmes remarques.

En appliquant ce théorème au cas le plus simple, on voit que, si un point m est en équilibre sous l'action de trois forces $\overline{mO_1}, \overline{mO_2}, \overline{mO_3}$, cette position d'équilibre est la position du point M pour laquelle la somme

$$\overline{MO_1}^2 + \overline{MO_2}^2 + \overline{MO_3}^2$$

est minimum, ce qui est une propriété bien connue du centre de gravité du triangle $O_1 O_2 O_3$.

IV. Plus généralement, si l'on prend à partir de m_1 sur la direction $m_1 p_1$ une longueur $\overline{m_1 O_1}$ égale à $\left(\frac{p_1}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, sur la direction $m_2 p_2$ une longueur $\overline{m_2 O_2}$

(¹) Ce principe peut être déduit d'un principe plus général relatif au mouvement donné par Gauss (*Journal de Crelle*, t. IV). *Voir* aussi *Mécanique analytique* de Lagrange, troisième édition, par M. J. Bertrand, t. II, Note IX.

égale à $\left(\frac{p_2}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, ..., ν désignant une constante, la fonction

$$R = -\frac{k}{\nu+1}\left(\overline{M_1O_1}^{\nu+1} + \overline{M_2O_2}^{\nu+1} + \ldots + \overline{M_nO_n}^{\nu+1}\right)$$

est maximum ou minimum quand les points M_1, M_2, ..., M_n du système prennent la position d'équilibre considérée m_1, m_2, ..., m_n. En effet, en appliquant aux points M_1, M_2, ..., M_n des forces P'_1, P'_2, ..., P'_n dirigées suivant $\overline{M_1O_1}$, $\overline{M_2O_2}$, ..., $\overline{M_nO_n}$ et égales à $k\overline{M_1O_1}^{\nu}$, $k\overline{M_2O_2}^{\nu}$, ..., on obtient un système de forces dérivant de la fonction de forces R et se réduisant aux forces p_1, p_2, ..., p_n dans la position m_1, m_2, ..., m_n.

Si $\nu = -1$, il faut remplacer R par

$$R = -k\log\overline{M_1O_1}.\overline{M_2O_2}\ldots\overline{M_nO_n}.$$

Soient, par exemple, plusieurs forces se faisant équilibre appliquées à un point libre dans une position m et ayant pour extrémités des points e_1, e_2, ..., e_n : ce point m est le centre des moyennes distances des points e. Prenons sur chaque droite $\overline{me_i}$ un point O_i tel que

$$\overline{mO_i}.\overline{me_i} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous aurons ainsi construit un système de points O_i inverses des points e_i par rapport au point m. D'après ce que nous venons de voir, le point m est l'une des positions du point M rendant maximum ou minimum l'expression

$$\log\overline{MO_1}.\overline{MO_2}\ldots\overline{MO_n}.$$

Réciproquement tout point m' pour lequel cette expression est maximum ou minimum est le centre des moyennes distances des points formant la figure inverse des points O_i par rapport à ce point m'. Quand les points O_1, O_2, ..., O_n sont dans un plan, ces points m' sont, d'après une remarque de Chasles ([1]), les points représentant les racines de la dérivée d'un polynôme ayant pour racines les quantités imaginaires représentées par les points O_1, O_2, ..., O_n.

([1]) *Voir* des Notes de M. F. Lucas, *Comptes rendus*, 1879 et 1888, et une Note de M. Berloty, *ibid.*, 1884.

V. Dans les énoncés précédents on pourrait remplacer les points fixes appelés O_1, O_2, ..., O_n par des surfaces fixes quelconques menées par ces points normalement à p_1, p_2, ..., p_n et supposer les distances aux points fixes remplacées par les distances à ces surfaces. Mais toutes les propositions ainsi obtenues sont des cas particuliers de la suivante, qui permet d'assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima dans la position d'équilibre considérée. Formons une fonction U de x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_n, y_n, z_n dont les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}$ prennent les valeurs A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ quand le système est dans la position d'équilibre considérée, c'est-à-dire quand les coordonnées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_n, y_n, z_n prennent les valeurs a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; ...; a_n, b_n, c_n. Le même système, sollicité par des forces P'_1, P'_2, ..., P'_n dérivant de la fonction des forces U, sera encore en équilibre dans la même position m_1, m_2, ..., m_n, car, dans cette position, les forces P'_1, P'_2, ..., P'_n coïncident avec p_1, p_2, ..., p_n. Donc la fonction U est en général maximum ou minimum pour cette position d'équilibre et, dans tous les cas, sa variation s'annule pour cette position.

Des remarques analogues peuvent être faites au sujet du principe de la moindre action et du principe d'Hamilton, pour un mouvement déterminé du système correspondant à des conditions initiales déterminées. On obtient alors des intégrales définies devenant maxima ou minima pour ce mouvement déterminé.

NOUVEL HYGROMÈTRE A CONDENSATION,

PAR M. HENRI GILBAULT,

Professeur-agrégé au Lycée de Toulouse.

Pour déterminer l'humidité absolue ou l'humidité relative avec un hygromètre à condensation, il faut observer exactement :

1° Le moment d'apparition du dépôt de rosée;

2° La température de la surface sur laquelle se produit ce dépôt.

Jusqu'ici un grand nombre de physiciens se sont attachés à perfectionner les procédés d'observation du premier point, c'est-à-dire de l'apparition du dépôt de rosée.

Mais on ne s'est pas préoccupé également de la seconde partie des mesures, c'est-à-dire de la détermination de la température de la surface sur laquelle se produit le dépôt de rosée. Dans les hygromètres de Daniell (1), de Regnault (2), de M. Alluard (3) et de M. Crova (4), on admet que la température donnée par un thermomètre plongé dans le liquide réfrigérant est égale à celle de la surface métallique extérieure sur laquelle se produit la condensation; mais ce point ne saurait être admis, le liquide réfrigérant, qui est de l'éther ou du sulfure de carbone, ayant une conductibilité thermique très faible. Récemment M. Dufour (5) a proposé d'employer, comme lame de condensation, une plaque de cuivre rouge argentée ayant $0^{cm},12$ d'épaisseur, percée suivant son grand axe d'un trou pouvant contenir un thermomètre autour du réservoir duquel est tassée de la limaille de cuivre rouge très fine. « L'avantage principal que présente cet hygromètre est que

(1) DANIELL, *Annales de Gilbert*, t. LXV, p. 169; 1827.

(2) REGNAULT, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XV, p. 129; 1845.

(3) ALLUARD, *Journal de Physique*, 1re série, t. VII, p. 328; 1878.

(4) CROVA, *ibid.*, 2e série, t. II, p. 166; 1883.

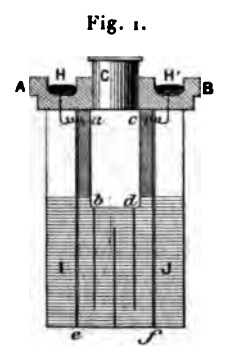
(5) DUFOUR, *ibid.*, 2e série, t. VIII, p. 74; 1889.

la température du thermomètre varie d'une façon beaucoup plus régulière et graduelle que ce n'est le cas lorsqu'il plonge dans le liquide volatil; en outre et surtout, la température qu'il donne se rapproche beaucoup plus de celle de la surface polie du métal que ne peut le faire un thermomètre plongé simplement dans le liquide. » Mais, comme le fait observer très justement M. Dufour lui-même, le thermomètre, dans les conditions précédentes, ne donne pas encore exactement la température de la surface extérieure de la lame de cuivre argentée, à cause de la non-homogénéité de la masse thermométrique : bloc de cuivre et thermomètre.

Supposons que l'on prenne une lame métallique infiniment mince et de faible dimension, qu'on la fasse adhérer à l'une des faces d'une lame de verre refroidie par son autre face et que l'on puisse déterminer exactement la température de cette plaque de métal, indépendamment de la lame de verre, au moment de l'apparition du dépôt de rosée; on aurait un hygromètre parfait. Or il existe un procédé très délicat pour évaluer la température d'une lame métallique infiniment mince : il suffit d'en mesurer la résistance électrique. C'est ce procédé que j'ai employé.

Description de l'appareil. — Après un certain nombre d'essais, je me suis arrêté à un appareil en verre ayant la forme d'un prisme à base carrée (*fig.* 1) dont la base a $2^{cm},5$ de côté et dont la hauteur est de $7^{cm},5$. La face

Fig. 1.



antérieure, en verre plus mince que le reste, est d'abord recouverte sur toute sa surface de platine, par exemple, par le procédé de M. Dodé (¹) et de M. Jouglet (²) ou par celui de M. Cailletet (³), puis, au moyen d'acide,

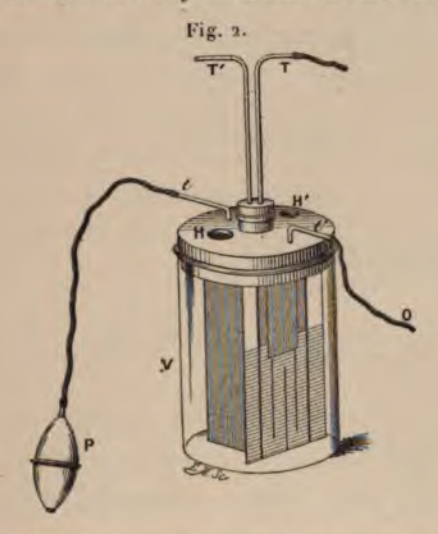
---

(¹) Dodé, *Bulletin de la Société chimique*, t. III, p. 398; 1865.
(²) Jouglet, *ibid.*, t. XIII, p. 477.
(³) Cailletet, *Société de Physique*; 1891. — *La Nature*, t. I, p. 91; 1891.

on enlève le platine de la région *abcd* en même temps que l'on trace sur le platine restant des traits en chicane ayant 1^{mm} de largeur et destinés à offrir un plus long parcours au courant; la surface de ces traits est enduite de gomme laque. Les languettes *ab* et *cd* de platine sont recouvertes d'une forte couche de cuivre électrolytique, ce qui permet de leur souder des fils de platine qui établissent la communication avec des godets de mercure H et H′ où se font les prises de contact; ces godets sont creusés dans une pièce d'ébonite AB qui est traversée en son centre par le col du flacon de verre auquel elle est mastiquée.

De chaque côté de la surface *bdef* sont des lames de verre platiné, abso-

Fig. 2.



lument semblables à celui de la surface voisine, et qui servent de contraste. Cet ensemble est placé dans un vase cylindrique V dont la pièce d'ébonite AB forme le couvercle; un tube *t′* auquel est relié un caoutchouc met l'appareil en communication avec la région O dont on veut déterminer l'état hygrométrique; un second tube *t* qui descend jusqu'au fond du vase V est relié par un tube de caoutchouc à une poire de même matière P qui produit une aspiration et détermine le passage de l'air dans l'appareil. Dans l'intérieur du petit flacon de verre *abcdef*, on place de l'éther que l'on vaporise facilement au moyen d'un barboteur TT′ (*fig.* 2).

Détermination du coefficient de variation de la résistance électrique du platine avec la température. — La mesure de la température de la lame de platine infiniment mince *bdef* devant être faite par la détermination de sa résistance électrique, il faut, au préalable, connaître exactement

la résistance de cette lame à 0° et la loi de sa variation avec la température. Pour déterminer cette loi j'ai placé le petit flacon de verre *aecf* dans un bain d'huile de naphte dont la température, qu'on pouvait faire varier, était déterminée exactement au moyen d'un bon thermomètre donnant le $\frac{1}{20}$ de degré. Les résistances étaient mesurées au moyen du pont simple de Wheatstone, car en général les appareils ont une résistance variant entre 300 et 600 ohms.

Comme résultat de mes expériences, j'ai trouvé qu'entre 0° et 30° on pouvait représenter la résistance R_t à la température de t° en fonction de la résistance R_0 à 0° par une formule de la forme

$$R_t = R_0(1 + \alpha t - \beta t^2), \tag{1}$$

dans laquelle

$$\alpha = 0,002882$$

et

$$\beta = 0,000000531.$$

Or de l'équation précédente on déduit

$$t = \frac{1}{R_0(\alpha - \beta t)}(R_t - R_0), \tag{2}$$

et, comme β est très petit, on peut, dans une première approximation, le négliger; on obtient ainsi une première valeur de t qui permet, en se reportant à une Table calculée pour chaque instrument, d'avoir la valeur du coefficient $\frac{1}{R_0(\alpha - \beta t)}$ et par suite une valeur exacte de t.

Marche d'une expérience. — Lors d'une expérience, la résistance H*abde*H' (*fig.* 1) forme l'une des branches d'un pont de Wheatstone. Le galvanomètre employé est un modèle Thomson à double enroulement, très sensible et observé par la méthode de Poggendorff. On commence par ramener, à la température où l'on se trouve, le galvanomètre au zéro en ne laissant passer le courant qu'un temps excessivement court, ce qu'on est forcé de faire si l'on emploie pour les mesures une boîte à pont. On fait ensuite passer dans le vase V, en actionnant la poire de caoutchouc P, de l'air dont on veut déterminer l'état hygrométrique ; en même temps on met en marche l'aspirateur qui vaporise l'éther et refroidit par conséquent la lame de platine; pendant ce refroidissement, qu'on peut conduire lentement, on enlève de temps en temps des fiches à la boîte de résistance de

façon à ramener le galvanomètre au zéro, de sorte que, lorsque le dépôt de rosée apparaît, on n'a presque plus rien à faire pour que le galvanomètre reste immobile. On peut du reste recommencer plusieurs fois l'apparition de la rosée qui est très fugitive et disparaît instantanément, surtout pendant le passage du courant nécessaire aux mesures. La résistance R_t ainsi mesurée permet, comme nous l'avons dit précédemment, de calculer la température t à laquelle apparaît le dépôt de rosée et de connaître par suite la tension de la vapeur dans l'air.

Quant au dépôt de rosée, on peut saisir très exactement le moment où il se produit en observant par réflexion, sur la lame de platine, l'image d'une tige de cuivre rouge; lorsque la surface du platine est sèche et brillante, l'image de la tige est rouge; au contraire, dès que la condensation aqueuse se produit, l'image, tout en conservant sa forme et sa netteté, se décolore.

Évaluation de l'approximation des résultats donnés par l'appareil. — On peut se demander *a priori* si la formation du dépôt de rosée à la surface de la lame de platine *befd* n'en modifie pas la résistance électrique; en outre, à la surface des traits qui divisent cette lame pour en augmenter la longueur, il peut également se condenser de la vapeur d'eau, ce qui constituerait un conducteur nouveau produisant une dérivation.

Mais, comme je l'ai dit, les traits sont recouverts de gomme laque, ce qui évite le dépôt de rosée, et la condensation qui se produit à la surface de la lame métallique est si fugitive qu'elle disparaît pendant les mesures et qu'il n'y aurait pas lieu d'en tenir compte; toutefois, même en admettant la persistance, pendant les mesures, de ce dépôt et lui assignant une épaisseur nécessairement trop grande, on reconnaît que son influence ne pourrait même pas s'exercer sur le $\frac{1}{10000}$ de la valeur de la résistance; or, si l'on peut évaluer la résistance de la lame de platine avec cette approximation, ce qu'on obtient sans difficulté avec le pont de Wheatstone, on peut par contre en évaluer la température à $\frac{1}{28}$ de degré près.

Du reste, j'ai fait à cet égard des expériences qui lèvent toute espèce de doute. Je prenais une série de flacons laveurs de faibles dimensions que j'assemblais de façon qu'un courant gazeux pût les traverser, tout en barbotant dans le liquide qu'ils contenaient; à la suite de ces flacons, je plaçais une colonne contenant du verre pilé sur lequel je faisais couler le même liquide. Cet ensemble était placé dans une grande cuve contenant de l'eau à une température constante et connue. Si le liquide contenu dans les flacons laveurs était, comme je le faisais, un mélange d'eau et d'acide

sulfurique en proportions bien définies, l'air qui avait traversé cet ensemble d'appareils en sortait possédant de la vapeur d'eau à une tension parfaitement connue et donnée par des Tables construites par Regnault ([1]).

Or, j'ai opéré de cette façon à différentes températures avec des mélanges d'eau et d'acide sulfurique répondant aux formules $SO^3, 8HO$ et $SO^3, 12HO$. Le Tableau suivant, dans lequel j'ai consigné mes résultats, contient, dans la première colonne, les températures des appareils de saturation; dans la deuxième colonne, la composition des solutions employées; dans la troisième rangée sont placés les nombres donnés par Regnault pour les tensions de vapeur des solutions inscrites dans la première rangée; la quatrième colonne renferme les températures t indiquées par l'hygromètre lorsque se produit la condensation, l'appareil étant placé dans de l'air saturé par les solutions dont la composition se trouve dans une même ligne horizontale; enfin la cinquième colonne renferme les tensions de la vapeur d'eau à la température t^o.

Tableau.

Température.	Composition des solutions.	Tension de vapeur des solutions.	t^o Température de condensation donnée par l'hygromètre.	Tension de la vapeur d'eau à t^o ([2]).
°		mm	°	mm
15.............	$SO^3, 8HO$	6,194	4,19	6,179
18.............	»	7,495	7,01	7,497
14.............	$SO^3, 12HO$	8,425	8,78	8,448
17.............	»	10,222	11,72	10,268

Or les nombres de la troisième et de la cinquième colonne sont semblables et ne diffèrent au maximum que de $0^{mm},046$, c'est-à-dire que la tension absolue de la vapeur d'eau dans l'air est évaluée au moins au $\frac{4}{1000}$ près.

En terminant, je suis heureux de pouvoir remercier publiquement M. le Professeur Berson de la bienveillante hospitalité qu'il a bien voulu m'accorder à son laboratoire de la Faculté des Sciences de Toulouse et qui m'a permis d'entreprendre ces recherches.

([1]) REGNAULT, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XV, p. 181; 1845.
([2]) *Ibid.*, p. 139; 1845.

SUR LES

RELATIONS DE LA COULEUR DES CORPS

AVEC LEUR NATURE CHIMIQUE,

PAR M. PAUL SABATIER,

Professeur de Chimie à la Faculté des Sciences de Toulouse.

L'étude des relations qui existent entre la constitution chimique des corps et leur coloration n'a donné lieu qu'à un assez petit nombre de travaux. En 1882, Bayley (1) fit observer que la propriété de donner des composés colorés est, comme toutes les autres propriétés physiques, en relation périodique avec la grandeur des poids atomiques simples. En se reportant à la courbe de Lothar Meyer, qui exprime la variation des volumes atomiques, on remarque que les métaux à sels colorés sont tous situés au voisinage d'un minimum de la courbe (2). Mais l'auteur se borna à énoncer cette observation, sans chercher à la développer dans ses conséquences.

Antérieurement, en 1876, Otto Witt a publié un Mémoire important sur les rapports entre la couleur et la constitution des matières colorantes de la série aromatique (3).

Les hydrocarbures sont incolores; mais, par l'introduction de certains groupes que l'auteur a nommés *chromophores*, AzO^2, O - O, Az = Az, ils deviennent des *chromogènes*, peu colorés et incapables de teindre, mais aptes à donner des couleurs intenses. Cette transformation des chromogènes en produits tinctoriaux résulte de l'introduction des groupes *auxochromes* (4), qui sont habituellement les groupes salifiables OH et AzH^2. Leur présence procure non seulement l'accroissement de la couleur

(1) *Philosophical Magazine*, [5], XIII, 34; 1882.

(2) LOTHAR MEYER, *Les théories modernes de la Chimie*, t. I, planche.

(3) *Deutsche chem. Gesell.*, t. IX, p. 522; 1876.

(4) Qui augmentent la couleur; αὔξω, j'accrois.

existant déjà dans le chromogène, mais encore l'aptitude à la fixation par les fibres des tissus.

Les conditions de constitution qui réalisent cette dernière propriété ont été précisées par divers auteurs, et particulièrement par M. de Kostanecki ([1]).

Les notions introduites par Otto Witt ont été développées récemment par M. Nœlting ([2]), dans un travail important qui embrasse toutes les matières colorées se rattachant à la série aromatique.

Nous nous proposons dans ce Mémoire d'aborder la question dans son ensemble, c'est-à-dire en nous adressant à l'universalité des combinaisons chimiques, mais sans nous préoccuper en aucune façon de la valeur tinctoriale des matières colorées.

DE LA COULEUR EN GÉNÉRAL.

La couleur d'un corps éclairé par la lumière blanche résulte de la qualité des rayons qu'il nous renvoie.

Les corps *blancs* sont ceux qui renvoient les diverses radiations en proportion élevée, la même pour toutes. Si la proportion est moindre, quoique demeurant encore uniforme, le corps est *gris*. Si elle devient nulle ou très faible, le corps est *noir*.

Mais il arrive fréquemment que les rayons simples ne sont pas tous renvoyés en proportion identique, les uns étant, par exemple, totalement absorbés, d'autres, au contraire, ne subissant qu'une perte minime. Ainsi le sulfate de cuivre ne nous renvoie guère que des rayons bleus et violets. L'iodure mercurique ne diffuse guère que les rayons rouges : il paraîtrait noir, si on l'éclairait avec une lumière bleue. Le sulfate de cuivre semblerait noir dans une lumière rouge.

La diffusion des rayons dont l'ensemble produit la couleur a lieu d'ailleurs selon un mécanisme assez variable.

Mode vitreux. — Le plus souvent la lumière renvoyée par le corps coloré provient bien en quelque partie des rayons diffusés sur sa surface;

([1]) *Bull. de la Soc. ind. de Mulhouse*, 1888, 1889.

([2]) *Théorie générale des matières colorantes* (*Revue générale des Sciences*, t. II, p. 245 et 299; 1891).

mais *elle vient principalement* de celle qui est renvoyée par diffusion intérieure après avoir pénétré dans la substance. Aussi, le plus souvent, la couleur vue par diffusion est la même que celle qui est transmise au travers de la matière translucide, ou dissoute dans un dissolvant incolore. Ainsi les sels cuivriques hydratés solides nous paraissent, par diffusion, *bleus,* exactement comme leurs cristaux ou leurs solutions, vus par transparence.

Cela a lieu d'ordinaire même pour les corps qui semblent opaques, cette opacité étant loin d'être absolue : mais dans ce cas, à la lumière colorée diffusée de l'intérieur, se joint une proportion très notable de lumière blanche diffusée sur la surface. C'est le cas des sels insolubles de cuivre, de nickel, de cobalt, de manganèse, qui possèdent une teinte identique à celle des solutions salines correspondantes, mais seulement lavée de beaucoup de blanc.

Mode métallique. — Il n'en est plus ainsi pour les substances qui possèdent sur leurs surfaces unies cet éclat spécial qu'on nomme *éclat métallique,* et qui est corrélatif d'une opacité assez énergique et de propriétés optiques fort remarquables. La lumière qui tombe sur ces surfaces s'y polarise elliptiquement, et comme d'ordinaire les éléments de cette polarisation n'y sont pas les mêmes pour les divers rayons qui constituent la lumière blanche, il en résulte une certaine couleur d'ensemble, habituellement peu intense. C'est le blanc jaunâtre pour l'argent, bleuâtre pour un grand nombre de métaux, rougeâtre pour le bismuth. Parmi les métaux, le cuivre et l'or seuls possèdent de ce fait une couleur bien nette. Mais ce ne sont point là des couleurs proprement dites, absolument inhérentes au corps qui les renvoie : car sous une incidence rasante, tous les métaux, même l'or et le cuivre, réfléchissent également tous les rayons et paraissent blancs. La teinte perçue provient exclusivement des modifications de la lumière renvoyée par la surface. La couleur transmise au travers de lames métalliques, assez minces pour être translucides, n'est plus la même : elle est généralement *complémentaire* de la couleur superficielle. L'or, rouge par réflexion, est vert par transparence; l'argent, jaunâtre par diffusion, est bleu pour la lumière transmise dans des feuilles extrêmement ténues.

Cette couleur par transmission des métaux solides est vraisemblablement identique avec celle de leurs vapeurs, dont malheureusement l'observation correcte est assez délicate. La vapeur du cadmium, métal bleuâtre, serait

jaune orangé; celle du rubidium serait bleue, celle du potassium verte. L'arsenic fournit une vapeur jaune citron. Au contraire, le sodium et le mercure donnent des vapeurs incolores, et il serait intéressant de connaître leur couleur de transmission dans l'état métallique.

Mode mixte. — Il convient de rapprocher des métaux un certain nombre de substances, transparentes, quoique douées d'un pouvoir absorbant très actif, et possédant la propriété singulière de réfracter irrégulièrement la lumière blanche (¹). Ces matières, dites *à dispersion anomale,* réfléchissent certaines couleurs, comme le verre, mais d'autres à la manière des métaux; et il en résulte une sorte d'éclat métallique produit par une couleur superficielle complémentaire de la coloration transmise. La couleur d'ensemble qui provient de cette double origine est plus ou moins éloignée de la couleur transmise, et s'en rapproche beaucoup pour des solutions étendues.

La fuchsine (sels de rosaniline) et un assez grand nombre de substances analogues, violet de Paris, bleu de Lyon, etc., la cyanine ou bleu de quinoléine, la carthamine, l'indigotine, la murexide, belle matière colorante pourpre qui se rattache à l'urée, le permanganate de potassium, l'iode lui-même, appartiennent à ce groupe de corps.

Les cristaux verts dorés de chlorhydrate de rosaniline laissent passer une lumière rouge cramoisi comme leurs dissolutions. Le bleu de Lyon se présente en masses violacées à tons bronzés, la couleur transmise étant d'un bleu intense.

Le permanganate de potassium est en prismes d'un vert foncé à reflets mordorés, à peu près opaques, mais sa solution a une magnifique teinte pourpre. Les cristaux d'iode, qui semblent gris métallique, sont rouges bruns par transmission, exactement comme leurs solutions dans l'eau ou l'alcool.

C'est, au moins en partie, à des causes semblables qu'il convient d'attribuer le polychroïsme si remarquable des cristaux de certains platinocyanures. Ainsi le platinocyanure de magnésium est rouge par transmission, vert par réflexion superficielle.

(¹) Cette dispersion anomale appartient, du reste, à la plupart des métaux peu colorés : platine, fer, nickel, bismuth (KUNDT, *Sitzungsber. der kön. Akad. der Wiss. zu Berlin,* VIII, 255; 1888).

Quel que soit le mécanisme, la couleur que nous percevons résulte toujours de l'absorption inégale des divers rayons visibles. Mais ceux-ci ne constituent qu'une faible portion de la radiation totale, qui comprend aussi des rayons plus réfrangibles ultraviolets, et surtout des rayons chauds dits *infrarouges*. La notion de couleur gagnerait certainement beaucoup, au point de vue qui nous occupe, à être étendue à tous les rayons visibles et invisibles. Nous savons bien que le sel gemme, très diathermane, est incolore pour toute espèce de rayons; au contraire, l'alun, l'eau, incolores pour la lumière blanche, seraient noirs pour les rayons infrarouges, qu'ils arrêtent presque entièrement. Malheureusement, nous ne possédons à cet égard que des renseignements peu nombreux et trop incomplets pour servir de base à des considérations générales.

COLORATION DES CORPS SIMPLES.

Il convient tout d'abord de comparer les couleurs des divers éléments simples. Pour faire une telle comparaison, nous adopterons la classification basée sur la loi périodique de Mendeleeff [1]. Le Tableau qui suit indiquera pour chaque famille quels éléments sont incolores, quels sont colorés, quels possèdent l'éclat métallique.

---

[1] L'ordre adopté ici pour les familles diffère peu de celui que nous avions indiqué antérieurement dans notre Mémoire *Sur la classification des corps simples par la loi périodique* (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, t. IV; B.12; 1891).

RANG de la famille.	Vh. (1)	Vo. (2)	ÉLÉMENTS incolores.	ÉLÉMENTS COLORÉS sans éclat métallique.	ÉLÉMENTS ayant l'éclat métallique.
1	1	1	*H.*	»	»
2	1	1	»	»	Li. Na. Cu, Ag. Au.
3	2	2	»	»	Gl, Mg. Zn. Cd, Hg.
4	3	3	»	*B.*	Al. Ga. In, Tl.
5	4	4	*C.*	(*C*). *Si.*	(*Si*), Ge. Sn, Pb.
6	3	5	*Az. P.*	(*P*).	*As, Sb*, Bi.
7	2	6	*O.*	(*O*). *S. Se.*	(*Se*). *Te.*
8	1	7	»	*Fl, Cl. Br. I.*	(*I*).
9	1	1	»	»	K. Rb. Cæ.
10	»	2	»	»	Ca. St. Ba.
11	»	3	»	»	Sc. Yt. La(3).
12	»	4	»	»	Ti. Zr. Ce, Tho.
13	»	5	»	»	Va. Nb. Ta.
14	»	6	»	»	Cr. Mo, Tu, Ur.
15	»	7	»	»	Mn.
16	»	8	»	»	Fe. Ni. Co, (Cu).
17	»	Id.	»	»	Ru. Rh. Pd. (Ag).
18	»	Id.	»	»	Os. Ir. Pt. (Au).

(1) Vh indique la valence maxima par rapport à l'hydrogène ou à un résidu forménique.
(2) Vo exprime la valence maxima par rapport à O ou à OH.
(3) On a laissé de côté, dans ce Tableau, plusieurs métaux de la cérite, didyme, erbium, holmium, samarium, qui constituent une sorte d'annexe au cérium.

La simple inspection de ce Tableau montre que le plus grand nombre des corps simples possède l'éclat métallique. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, il n'en résulte pas une coloration proprement dite, puisque la teinte perçue, le plus souvent très faible, retourne au blanc pour les incidences rasantes. En réalité, il faudrait compléter la notion de l'éclat métallique par celle de la couleur aperçue par transmission au travers de feuilles très minces. Malheureusement, nous ne possédons sur ce point que des renseignements peu nombreux, et nous savons seulement que l'argent vu de la sorte est bleu, que l'or et le cuivre sont verts (1). Certains, comme le mercure, seraient sans doute incolores dans ces conditions. La couleur des vapeurs métalliques ne peut nous fournir que des indications incertaines (*voir* ci-dessus, p. 3).

(1) Il convient de remarquer que ces métaux colorés par transmission appartiennent tous trois à la classe 2.

Les éléments incolores, ou colorés sans éclat métallique, appartiennent tous au groupe des *métalloïdes,* c'est-à-dire des corps simples qui donnent certains composés gazeux à la température ordinaire, et qui sont tous contenus dans les familles 4, 5, 6, 7, 8, non compris l'hydrogène. (Les symboles des métalloïdes figurent dans le Tableau en lettres italiques).

Un certain nombre de métalloïdes, Te, As, Sb, possèdent l'éclat métallique bien caractérisé. Quelques autres, Se, Si, n'ont cet éclat que pour certaines de leurs formes. L'iode, enfin, offre seulement des couleurs superficielles, rappelant l'aspect des métaux.

Dans chacune des familles qu'on peut nommer *métalloïdiques,* la coloration, nulle ou faible dans le premier terme, croît régulièrement avec le poids atomique, et devient finalement l'opacité corrélative de l'éclat métallique.

La famille 8 est la plus régulière de toutes : les éléments y sont tous colorés. La couleur, jaune pâle pour le fluor, s'accentue pour le chlore, passe au rouge foncé pour le brome, et acquiert dans l'iode une intensité extrême brun rouge, confinant à l'éclat métallique, et donnant lieu à la dispersion anomale, visible dans les cristaux aussi bien que dans les vapeurs violettes ou dans les dissolutions.

Dans la famille 7, l'oxygène est incolore, même dans l'état liquide; mais l'ozone, qui n'est que de l'oxygène condensé avec emmagasinement d'énergie, possède une coloration bleue, soit à l'état gazeux, soit à l'état dissous [1].

Le soufre est jaune en cristaux ou en dissolutions; mais, quand on le chauffe, on voit la teinte se foncer de plus en plus : à 440°, température d'ébullition, il est rouge noir. La vapeur très colorée qui se produit alors est très dense et correspond au poids moléculaire S^6, qui est aussi sans doute celui du soufre liquide rouge foncé. Ici, comme pour l'ozone, la condensation moléculaire est corrélative d'un accroissement du pouvoir absorbant.

Le sélénium se présente quelquefois sous la forme d'une poudre écarlate, fusible en une masse vitreuse noire, qui se transforme spontanément comme la poudre rouge, en cristaux gris d'aspect métallique.

L'accroissement du poids atomique aboutit, pour le tellure, à un éclat métallique bien établi.

---

[1] Dans [illegible] uide (Hautefeuille et Chappuis).

L'azote est incolore. Le phosphore ordinaire l'est aussi; mais, surtout à la température de 250°, il se transforme avec dégagement de chaleur en phosphore rouge plus dense, qui peut même, à température élevée, prendre une teinte violacée et presque métallique. L'introduction de la couleur coïncide vraisemblablement avec une condensation moléculaire.

Les éléments plus lourds, As, Sb, Bi, possèdent l'éclat métallique bien net.

Le carbone est incolore dans sa variété la plus pure, le diamant : il est grisâtre ou noir sous ses autres formes. Dans l'hypothèse ingénieuse qui a été proposée par M. Berthelot, tous les carbones connus ne seraient qu'une matière très condensée, le carbone vrai étant un gaz incolore comme l'oxygène.

Le silicium se présente soit sous l'aspect d'une poudre brune amorphe, soit en cristaux ayant un vif éclat métallique.

Quant au bore, seul terme non métallique de la famille 4, nous ne le connaissons guère que dans l'état d'une poussière amorphe brune ou verdâtre [1]. Il y a peut-être lieu de formuler pour le bore une hypothèse semblable à celle qui a été faite pour le carbone par M. Berthelot. Le bore vrai, non condensé, serait un élément incolore volatil. J'ai donné récemment quelques raisons à l'appui [*Note sur les sulfures de bore* (*Bull. Soc. chim.*, (2), p. 218; 1891)].

COLORATION DANS LES COMBINAISONS.

Le nombre des combinaisons connues est énorme; il est nécessaire d'y établir tout d'abord de grandes divisions. Nous considérons successivement :

1° Les combinaisons provenant exclusivement d'éléments doués d'éclat métallique;

2° Les combinaisons des éléments n'ayant pas l'éclat métallique : les substances organiques font presque toutes partie de ce groupe et leur étude constituera un Chapitre spécial important;

3° Les combinaisons des éléments métalliques avec les éléments non métalliques.

---

(1) M. Moissan a tout récemment préparé pour la première fois du bore *pur*. C'est une poudre de couleur marron clair (*Comptes rendus*, t. CXIV, p. 617; 1892).

COMBINAISONS DES ÉLÉMENTS A ÉCLAT MÉTALLIQUE.

Les métaux proprement dits s'unissent entre eux en donnant des composés qui ont l'aspect extérieur de véritables métaux : aussi les désigne-t-on sous la dénomination générale d'*alliages*. La teinte des alliages perçue sous de faibles incidences a quelque relation avec celle des constituants. Toutefois une faible quantité d'un métal blanc suffit d'ordinaire pour supprimer complètement la couleur propre d'un métal coloré, or ou cuivre.

Les bronzes d'aluminium sont blancs, s'ils contiennent 20 parties d'aluminium pour 80 parties de cuivre.

Les alliages de cuivre et d'argent possèdent la teinte de ce dernier métal, quand sa proportion atteint la moitié.

Le plus souvent la décoloration est progressive : l'alliage $SnCu^{96}$ est rose, $SnCu^{24}$ est jaune d'or, $SnCu$ est blanc comme l'étain.

Ces résultats, cités à titre d'exemples, établissent dans certains métaux un pouvoir décolorant très accentué. Parfois, au contraire, l'action produite semble indiquer une modification réelle de la teinte plutôt qu'une simple décoloration. Ainsi 50 pour 100 de zinc donnent avec l'or un alliage blanc. Au contraire, en incorporant à l'or des doses croissantes de fer, la couleur varie peu à peu :

20 pour 100 de fer donnent un or			*gris.*
25 pour 100	»	»	*bleuâtre.*
75 pour 100	»	amènent le blanc jaunâtre.	

On obtient des produits analogues en associant les métaux vrais aux métalloïdes d'éclat métallique, arsenic, tellure et même silicium : les composés fournis ont habituellement l'aspect de véritables alliages ([1]), et tendent d'autant plus à s'écarter de cette apparence que la chaleur dégagée dans leur formation est plus élevée.

COMBINAISONS DES ÉLÉMENTS NON MÉTALLIQUES.

I. Les éléments non métalliques *colorés*, Fl, Cl, Br, I, S, Se, ont peu d'affinités réciproques; mais les quelques composés qu'ils fournissent, par

---

([1]) Même les tellurures alcalins anhydres, d'après M. Demarçay.

exemple, les chlorures de soufre, de sélénium, d'iode, ont une couleur rouge d'autant plus foncée que la coloration des constituants est plus intense.

II. Si l'on oppose à ces corps les éléments *incolores*, H, O, Az, Ph, C, et aussi B (d'après ce qui a été dit plus haut, p. 8), nous trouvons que le plus souvent les combinaisons formées sont incolores. Je me bornerai à citer, comme exemples :

Les hydracides HFl, HCl, HBr, HI, H^2S, H^2Se;
Les anhydrides acides SO^2, SO^3, I^2O^5;
Les chlorures et bromures $PhCl^3$, $PhBr^3$, BCl^3, BBr^3;
Les fluorures $PhFl^3$, $PhFl^5$, BFl^3, CFl^4;
Les chlorures et bromures de carbone;
Les sulfures CS^2, B^2S^3;
Les acides SO^4H^2, ClO^3H, ClO^4H, IO^3H;
Les composés $PhCl^3O$, $PhCl^3S$, $COCl^2$, BI^3 (1), SO^2Cl^2, $SOCl^2$, CAzCl.

Toutefois la coloration de l'un des constituants survit dans un assez grand nombre de cas, et cela arrive surtout pour les plus colorés d'entre eux, Se, et surtout I. Nous citerons les principales de ces combinaisons :

Issues de Cl (jaune)	Cl^2O	rouges, vapeur jaune.
	ClO^2	
	AzOCl	rouges.
	$AzOCl^2$	
	AzO^2Cl^2	
	$AzCl^3$	jaune pâle.
	$PhCl^5$	jaune pâle.
Issues de Br (rouge)	$AzBr^3$	brun.
	$PhBr^5$	jaune.
Issues de I (rouge foncé)	I^2O^3	jaune.
	AzI^3	noir.
	PhI^3	rouges.
	Ph^2I^4	
	CI^4	
Issues de S (jaune)	AzS	jaunes.
	$Ph^nS^{n'}$	
	$PhBr^3S$	
	H^2S^2	
	CS	brun.

(1) MOISSAN, *Comptes rendus*, t. CXII, p. 717; 1890.

Issues de Se (écarlate)	AzSe	orangé.
	PhSe^n	rouges.
	B^2Se^3	jaune [1].
	SeO^2	incolore, vapeur jaune.

Si nous comparons ces résultats à ceux qui précèdent, nous arrivons à deux conclusions importantes :

1° Certains éléments ont une influence décolorante très marquée;

2° Les composés produits avec beaucoup de chaleur sont incolores ou peu colorés.

Le pouvoir décolorant appartient surtout à l'hydrogène, au bore, au carbone : il n'existe guère dans l'azote et le phosphore; l'oxygène a un rôle intermédiaire.

Nous trouvons, en effet, que, parmi les composés mentionnés ci-dessus, *tous* ceux qui renferment de l'hydrogène (hydracides, oxacides) sont incolores : l'acide sélénhydrique lui-même, H^2Se, est incolore, quoique formé avec absorption de chaleur à partir des éléments. Il n'y a d'exception que le persulfure H^2S^2, jaune; mais c'est un corps fort instable où le soufre est très faiblement combiné à l'hydrogène sulfuré, ce qui est une circonstance éminemment favorable au maintien de la coloration.

Pour le bore, l'iodure et le sulfure B^2S^3 sont incolores comme le fluorure ou le chlorure; mais la couleur reparaît pour le séléniure.

Le carbone étend son influence décolorante jusqu'au bromure et au sulfure, mais non jusqu'à l'iodure CI^4 qui est rouge [2].

L'oxygène nous apparaît comme décolorant dans toutes les combinaisons dues à des affinités énergiques. Les anhydrides SO^2, SO^3 sont incolores; l'anhydride iodeux I^2O^3 est ramené au jaune, l'anhydride iodique I^2O^5, plus oxygéné, est incolore. Les oxychlorures SO^2Cl^2 et même $SOCl^2$ ne sont plus colorés.

Au contraire, dans les combinaisons endothermiques, l'oxygène se manifeste comme plutôt favorable à la coloration : les composés Cl^2O, ClO^2 sont rouges, plus colorés que le chlore qui y figure. De même l'oxychlo-

---

(1) P. SABATIER, *Bull. Soc. chim.*, 3e s., VI, 218; 1891.

(2) Le sous-sulfure CS est dans un état physique comparable à celui du carbone amorphe et correspond, sans doute comme celui-ci, à une condensation moléculaire assez avancée. Il en est de même du sous-sulfure de bore, que j'ai signalé l'année dernière.

rure $AzOCl$ est rouge, tandis que le chlorure $AzCl^3$ est seulement jaune pâle.

Plusieurs des exemples qui viennent d'être rappelés montrent que les combinaisons dues à des affinités énergiques sont le plus souvent incolores. Le trichlorure de phosphore $PhCl^3$, corps très stable formé avec beaucoup de chaleur, est absolument incolore.

Au contraire, le chlorure d'azote, corps endothermique et explosif, est jaune. Le perchlorure de phosphore $PhCl^5$ n'est produit à partir du trichlorure que par une affinité médiocre, qui ne résiste guère à la vaporisation du composé : aussi retrouvons-nous dans ce corps la teinte jaune corrélative des 2 atomes de chlore ainsi fixés.

III. Ces résultats nous permettent de prévoir en quelque mesure ceux que fourniront les métalloïdes incolores H, B, C, O, Az, Ph, combinés entre eux. Les corps obtenus sont le plus souvent incolores. Nous citerons comme tels, parmi les composés binaires :

Les hydrures H^2O, H^2O^2, BH^3, AzH^3, Az^2H^4 (1), Az^3H (2), PhH^3, Ph^2H^4, et la nombreuse série des carbures d'hydrogène CH^4, C^2H^4, C^4H^2, C^6H^6, $C^{10}H^8$, $C^{14}H^{10}$, $C^{19}H^{16}$, $C^{16}H^{32}$, etc.

Les oxydes anhydres B^2O^3, CO, CO^2, Az^2O, AzO, Az^2O^5, Ph^4O^6 (3), Ph^2O^5.

Les composés BAz, CAz.

Parmi les composés ternaires incolores, nous indiquerons seulement :

Les acides $CAzH$, $B(OH)^3$, $PhH(OH)^2$, $Ph(OH)^3$, $PhO(OH)^3$, $PhO^2(OH)$, AzO^2H, AzO^3H,

à côté desquels il faudrait inscrire un nombre immense de matières organiques incolores formées de carbone, hydrogène et oxygène.

Nous trouvons toutefois un assez grand nombre d'exceptions, qui, si l'on se borne aux composés binaires, dérivent toutes des éléments incolores qui se sont antérieurement révélés comme les plus favorables à la coloration, l'azote, le phosphore.

---

(1) T. CURTIUS, *Deutsche chem. Gesell.*, XX, 1632.
(2) T. CURTIUS et RADENHAUSEN, *Journ. für prakt. Chem.*, XLIII, 207.
(3) THORPE et TUTTON, *Bull. Soc. Chim.*, [3], IV, 659.

Ce sont :

$(Ph^2H)^n$	Solide jaune.
$(Ph^4O)^n$	Solide orangé.
PhB	Solide brun (1).
Az^2O^3	Liquide bleu.
AzO^2	Liquide (ou vapeur) orangé [aux basses températures, la molécule est Az^2O^4 incolore (2)].

Les trois phosphures qui précèdent doivent sans doute correspondre à un état de condensation moléculaire assez avancée.

Les conditions de la coloration sont moins aisées à imaginer pour les deux oxydes d'azote. Le caractère endothermique de ces composés ne suffit pas à l'expliquer : car l'oxyde AzO n'est pas coloré, quoique bien plus endothermique que le peroxyde AzO^2. On pourrait s'en rendre compte comme il suit.

La molécule d'oxygène O^2 est incolore, mais l'ozone $O-O^2$ est coloré (en bleu). De même l'oxyde chlorique ClO^2 a une teinte plus foncée que le chlore Cl^2. Nous pouvons donc penser que le groupe O^2, associé par des affinités médiocres avec un atome (ou un groupe d'atomes) peu ou point décolorant, introduit une coloration.

AzO est incolore, AzO^2 sera coloré : nous verrons plus loin ce groupe O^2 intervenir fréquemment dans certaines combinaisons organiques pour les colorer (3).

---

(1) H. MOISSAN, *Comptes rendus*, t. CXIII, p. 727; 1891.

(2) SALET, *Comptes rendus*, t. LX, 488. — NAUMANN, *Ber. der deutsch. chem. Gesell.*, 2045; 1878. — RAMSAY, *Chem. News*, LIII, 611.

(3) Il est plus difficile de comprendre comment la juxtaposition de 2 molécules orangées AzO^2 peut, à basse température, donner 1 molécule Az^2O^4 incolore comme l'anhydride azotique Az^2O^5, alors que l'anhydride azoteux Az^2O^3 est bleu.

Cette couleur bleue de l'anhydride azoteux fait songer à celle de l'ozone, composé également fort instable. Leurs constitutions moléculaires

$$O\left\langle\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\right. \qquad O\left\langle\begin{matrix}AzO\\AzO\end{matrix}\right.$$

sont quelque peu comparables. Le remplacement d'un groupe AzO par AzO^2 devrait introduire une teinte jaune orangé, et l'on peut admettre, dans quelque mesure, que la couleur bleue primitive est ainsi annulée : on serait ainsi conduit à l'anhydride incolore

$$O\left\langle\begin{matrix}AzO\\AzO^2\end{matrix}\right.$$

qui n'est autre que le peroxyde d'azote aux basses températures.

COLORATION DANS LES MATIÈRES ORGANIQUES.

L'immense majorité des matières organiques est incolore comme ses principaux constituants, carbone, hydrogène, oxygène, et assez fréquemment azote. Toutefois on y rencontre un certain nombre de produits colorés, dont quelques-uns, doués d'une teinte très intense, ont reçu d'importantes applications dans l'industrie tinctoriale.

En général, la complication moléculaire se montre favorable à la coloration; celle-ci résulte fréquemment de l'introduction dans la molécule organique de certains éléments ou groupes colorés, tels que le brome, l'iode, le soufre, la vapeur nitreuse AzO^2, qui tendent à donner une teinte jaune plus ou moins mélangée de rouge.

Le pouvoir décolorant de l'hydrogène, que nous avons déjà signalé précédemment, s'opposera au contraire à l'apparition de la couleur : aussi tous les carbures d'hydrogène sont-ils à peu près incolores. Tout au plus constate-t-on une teinte jaunâtre pour des carbures compliqués et pauvres en hydrogène, par exemple dans l'anthracène $C^{14}H^{10}$ (1).

Série grasse. — On conçoit que cette action de l'hydrogène s'exercera plus complètement dans les composés de la série grasse, où la complication moléculaire est généralement peu marquée.

Aussi la coloration ne s'y trouve guère que comme conséquence de la présence dans la molécule d'un nombre suffisant d'atomes ou de groupes colorés, soufre, iode, vapeur nitreuse AzO^2 (2).

Le chlore et le brome ne suffisent pas d'ordinaire à déterminer la coloration. Ainsi :

Les dérivés du méthane, $CHCl^3$, CCl^4, CBr^4.
Ceux de l'éthane, C^2Cl^6, $C^2H^2Br^4$, C^2HBr^5, $C^2Cl^2Br^4$.
Les acides trichloracétique, tribromacétique, tétrabromobutyrique, l'anhydride trichloracétique $C^4Cl^6O^3$, etc.

sont tous incolores (3).

---

(1) Le carotène serait, d'après M. Arnaud, un carbure $C^{26}H^{38}$ bleu par réflexion, orangé par transparence (*Comptes rendus*, t. CII, p. 1119).

(2) Il ne s'agit évidemment que des dérivés nitrés proprement dits, dus à la substitution de — AzO^2, et non pas des dérivés éthérés contenant le résidu AzO^2—, qui sont toujours incolores.

(3) Toutefois la dichloro-éthylamine est colorée en jaune, ainsi que la dichlorométhylamine.

De même une seule substitution d'iode ou de vapeur nitreuse n'est pas généralement suffisante pour amener la couleur. Par exemple, l'acide iodacétique $C^2H^3IO^2$ est incolore, tandis que l'acide diiodacétique est teinté en jaune.

Tous les dérivés mononitrés des carbures forméniques sont incolores, ainsi que leurs dérivés chlorés ou bromés :

Ex.	Chloropicrine................	$CCl^3(AzO^2)$
	Bromopicrine................	$CBr^3(AzO^2)$

L'introduction du groupe nitrosyle AzO à côté du groupe AzO^2 introduit la coloration dans des conditions particulièrement intéressantes. Si le dérivé nitré est primaire, le dérivé nitrosé qui en provient a comme symbole général

$$R - CH(AzO^2)(AzO);$$

c'est un acide nitrolique, jaune orangé.

Si le dérivé mononitré est secondaire, le composé nitrosé sera

$$R - C(AzO^2)(AzO) - R';$$

on l'appelle un *nitrol :* ses solutions sont nettement colorées en bleu.

Le nombre d'éléments colorants nécessaires pour obtenir la couleur est, comme on peut s'y attendre, d'autant plus grand que la chaîne carbonée, toujours ouverte, est plus longue. Ainsi, pour le méthane, il suffit de 2 atomes d'iode :

CH^2I^2....................	Huile jaune
CHI^3....................	Cristaux jaunes
CI^4......................	Cristaux rouges

Pour l'éthane, 2 atomes d'iode ne suffisent plus : les deux éthanes biiodés sont incolores. Mais, comme on l'a vu plus haut, ils sont suffisants dans l'acide diiodoacétique, moins riche en hydrogène.

De même nous trouvons que le propylène triiodé $C^3H^3I^3$ est encore incolore; il en est de même du tétraiodure de diallyle $C^6H^{10}I^4$.

Un seul atome de soufre ne colore que rarement la molécule : le sulfure de méthyle, le sulfure d'éthyle, la thialdéhyde C^2H^4S sont incolores. Au contraire, le bisulfure de méthyle $(CH^3)^2S^2$ est coloré en jaune.

Le brome n'apporte la couleur que dans les combinaisons où 1 molécule

de brome est fixée par des affinités médiocres sur 1 molécule déjà faite. Ainsi le sulfure de méthyle incolore. donne le bromure jaune $(CH^3)^2S.Br^2$. Le sulfocarbonate d'éthyle $CS(SC^2H^5)^2$ qui est une huile jaune fournit par addition le composé $CS(SC^2H^5)^2.Br^2$. en cristaux rouges fort instables.

Ces produits d'addition moléculaire ne sont pourtant pas toujours colorés : la sulfo-urée $CS(AzH^2)^2$ donne avec le brome le corps incolore comme elle $CS(AzH^2)^2.Br^2$.

Les corps de la série grasse, tous engendrés à partir du méthane primordial par des substitutions forméniques, ont par conséquent une structure moléculaire simple. Une certaine complication apparaît toutefois dans quelques-uns d'entre eux, et spécialement dans les dérivés de l'urée; néanmoins la plupart de ceux-ci sont incolores, et il faut arriver à une complication extrême pour voir la couleur se manifester. Les purpurates, qui possèdent une magnifique teinte pourprée ([1]), ont une constitution encore peu connue; la plus probable paraît

```
        AzH                      AzH
   CO /     \ CO            CO /     \ CO
     |       |                |       |
  AzH \     / C - AzM - C \     / AzH
        CO                       CO
```

Certaines molécules moins complexes se colorent par l'introduction d'un seul groupe nitré ou nitrosé.

Ainsi l'acide barbiturique $C^4H^4Az^2O^3$, incolore, fournit un dérivé bibromé également incolore; mais son dérivé mononitré (acide diliturique) fournit des solutions d'un jaune intense.

Bien plus, le dérivé nitrosé (acide violurique)

```
CO - AzH \
|          \
CH(AzO)     > CO
|          /
CO - AzH /
```

donne des sels fortement colorés en violet ou en rouge. Le nitrosyle s'est montré ici plus colorant que le groupe AzO^2.

([1]) La murexide est le purpurate d'ammonium.

L'influence de la complication moléculaire est ici bien manifeste, et cela nous permet de prévoir que la coloration sera plus fréquente dans la série aromatique.

Série aromatique. — La série aromatique et celles qui s'y rattachent comprennent un assez grand nombre de matières colorées, dont quelques-unes constituent des produits tinctoriaux très employés ([1]).

Les noyaux cycliques à liaisons multiples semblent, d'une manière générale, favorables à la couleur, et cela d'autant mieux qu'ils sont, dans la molécule, plus nombreux et associés d'une manière plus compliquée. Toutefois cette complexité ne suffit pas à déterminer la coloration, puisque tous les carbures, même les moins simples, sont incolores ou à peu près. Nous allons examiner successivement les diverses causes capables de développer ou de modifier la couleur.

I. Comme précédemment, l'introduction dans la molécule d'atomes ou de groupes colorés, brome, iode, vapeur nitreuse AzO^2 (auxquels il convient de joindre le nitrosyle AzO, d'après ce que nous avons vu des dérivés nitrosés dans la série grasse), pourra amener la coloration. Celle-ci sera d'autant plus intense, que le nombre des substitutions colorantes est plus grand, et aussi que la complication initiale de la molécule est plus forte.

Le chlore est généralement sans effet : les divers benzènes chlorés (de C^6H^5Cl à C^6Cl^6), les naphtalènes chlorés (de $C^{10}H^7Cl$ à $C^{10}Cl^8$), le phénanthrène hexachloré $C^{14}H^2Cl^8$, le chrysène dichloré $C^{18}H^{10}Cl^2$, etc., sont tous incolores. Toutefois la couleur se manifeste avec l'anthracène, qui se trouve à la limite de la coloration et l'acquiert sous les influences les plus légères : tous les anthracènes chlorés sont jaunes.

Le brome et surtout l'iode sont un peu plus actifs que le chlore, mais la complication moléculaire favorise beaucoup cet effet. Les benzènes tribromés sont incolores (comme tous les benzènes bromés), tandis que les sels de diazobenzène tribromé sont jaunes. La fluorescéine, matière colorante peu intense, devient une superbe teinture orangée, si l'on y substitue 4 atomes de brome ou d'iode ([2]).

([1]) On trouvera des détails sur la constitution des diverses matières colorantes de la série aromatique dans le Mémoire très intéressant de Nœlting (cité p. 1).

([2]) La fluorescéine tétrabromée est l'*éosine*. La tétraiodée a été nommée *érythrosine* : elle est plus violacée.

II. L'action colorante de la vapeur nitreuse est beaucoup plus générale, et conduit habituellement à une teinte jaune plus ou moins rougeâtre. Cependant nous trouvons que les dérivés mono-, bi-, trinitrés du benzène et des carbures homologues, toluène, xylène, mésitylène, cumène, etc. sont incolores ([1]).

Mais les phénols mononitrés, les nitranilines, les nitrorésorcines, le nitrocamphre, la nitronaphtaline, sont franchement colorés en jaune; le nitronaphtol-α est une couleur très puissante, que l'industrie a utilisée sous le nom de *jaune de Martius*. Leurs produits polynitrés sont encore plus colorés : l'un des trinitrophénols, l'acide picrique, possède un pouvoir tinctorial très énergique.

III. Les substitutions nitrosées (c'est-à-dire de AzO) pratiquées dans des molécules incolores, y apportent aussi habituellement une coloration jaune ou verdâtre. Le nitrosophénol $C^6H^4(AzO)(OH)$ se présente en cristaux verdâtres; la méthylaniline, la diphénylamine, le naphtalène, l'oxindol C^8H^7AzO, qui sont incolores, donnent des dérivés nitrosés d'une couleur jaune.

IV. Le groupe sulfoné SO^3H, qui se substitue si fréquemment dans les corps aromatiques, se montre assez indifférent vis-à-vis de la couleur. Souvent il la rend plus utilisable dans la pratique, en apportant la solubilité au corps déjà coloré où on l'introduit. Ainsi le bleu de Lyon devient soluble sans perdre sa teinte, quand on y réalise une ou plusieurs substitutions sulfonées.

On a vu plus haut que l'anthracène, quoique incolore, possède une tendance très marquée à la couleur; nous en retrouvons ici une nouvelle preuve : les anthracènes sulfonés sont tous jaunes.

V. L'oxygène, élément incolore, ne s'est montré colorant qu'exceptionnellement dans les combinaisons métalloïdiques. Au contraire, il joue un rôle très important dans la coloration des produits aromatiques. Ce rôle est, d'ailleurs, assez complexe et demande à être étudié avec quelque détail.

Les monophénols, diphénols, triphénols, les naphtols sont encore incolores comme les carbures dont ils dérivent. Comme on peut le prévoir, les anthrols sont jaunes. Le tétraoxybenzène $C^6H^2(OH)^4$ est jaune et l'hexaphénol $C^6(OH)^6$ est constitué par des aiguilles grises ([2]).

([1]) Le nitrobenzène parfaitement pur et récemment préparé est incolore, mais il se colore spontanément à la lumière, s'il s'y trouve des produits thiophéniques (BIDET, *Bull. Soc. chim.*, 1889, [4], t. I, p. 3.

([2]) NIETZKI et BENCKISER, *Ber. der deutsch. chem. Gesell.*, t. XVIII, p. 499.

L'effet se trouve bien plus marqué dans les *quinones*, où le groupe O^2 remplace H^2, en apportant une coloration jaune très intense [1]. Citons seulement la quinone ordinaire $C^6H^4O^2$, la toluquinone, les naphtoquinones $C^{10}H^6O^2$. Nous y joindrons l'anthraquinone,

$$C^6H^4\langle{}^{CO}_{CO}\rangle C^6H^4, \text{ jaune rougeâtre,}$$

et la phénanthrène-quinone,

$$C^6H^4\overset{\diagup CO-CO \diagdown}{\rule{3em}{0.4pt}}C^6H^4, \text{ orangée,}$$

bien que ces deux corps aient une constitution distincte de celle des vraies quinones.

Les dérivés issus de ces quinones par substitutions variées, chlorées, nitrées, et aussi amidées ou *oxhydrilées* [2], possèdent une coloration encore plus marquée [3]. Ainsi à la quinone ordinaire se rattache l'acide chloranilique $C^6Cl^2(OH)^2O^2$ rouge, et aussi la tétraoxyquinone $C^6(OH)^4O^2$, dont les cristaux sont jaunes par transparence, bleu foncé par réflexion [4]. L'acide rhodizonique, rouge pourpre, dont les sels fournissent des cristaux rouges à reflets verts, n'est qu'une dioxydiquinone $C^6(OH)^2.O^2.O^2$ [4].

De même, de la naphtoquinone-α dérive une fort belle matière colorante, la dioxynaphtoquinone-α ou *naphtazarine*, $C^{10}H^4(OH)^2O^2$, rouge, dont les solutions alcalines possèdent une teinte pourpre.

L'anthraquinone, soumise à des substitutions oxhydrilées, fournit une série nombreuse de dérivés fortement colorés, dont la teinte varie du jaune au rouge très foncé. Quelques-unes de ces oxyanthraquinones ont une grande importance pratique : citons seulement la purpurine et surtout l'alizarine, principe actif de la garance, magnifique substance rouge, dont les solutions possèdent un pouvoir colorant très intense, rouge en général, bleu pourpré en présence des alcalis.

Les quinones peuvent se combiner avec les phénols, en donnant des

---

(1) *Voir* ci-dessus, page 13, la propriété colorante de ce groupe O^2, déjà signalé comme chromophore par Otto Witt.

(2) Ce sont, en réalité, des additions d'oxygène à la molécule.

(3) C'est ce que Otto Witt exprime en disant que OH et AzH^2 sont des groupes auxochromes qui accroissent la couleur déjà acquise.

(4) NIETZKI et BENCKISER, *loc. cit.*

combinaisons où la complication moléculaire favorise le développement de la couleur. Ainsi la quinhydrone, formée par l'union de la quinone avec l'hydroquinone incolore, cristallise en superbes lames vertes (vraisemblablement rouges par transmission). La pyrogalloquinone, la purpurogalline, issues de mécanismes semblables, sont fortement colorées en rouge.

L'action colorante de l'oxygène en relation avec les noyaux aromatiques apparaît aussi nettement dans les dérivés du diphénylméthane et surtout du triphénylméthane.

Le diphénylméthane $CH^2(C^6H^5)^2$ et la plupart des corps qui s'y rattachent ne sont pas colorés. La benzophénone $CO(C^6H^5)^2$, et même l'oxyde de diphénylènecétone ou *xanthone* de Græbe,

$$CO\langle{}^{C^6H^4}_{C^6H^4}\rangle O,$$

fournissent des cristaux incolores. Mais l'introduction de 2 atomes d'oxygène suffit pour faire naître la teinte; la dioxyxanthone ou *euxanthone*

$$CO\langle{}^{C^6H^3(OH)}_{C^6H^3(OH)}\rangle O$$

a une belle couleur jaune : c'est un des principaux constituants du *jaune indien*.

Le triphénylméthane $CH(C^6H^5)^3$ est absolument incolore, ainsi qu'un grand nombre de ses dérivés, comme

Le dioxytriphénylméthane $CH\langle{}^{C^6H^5}_{[C^6H^4(OH)]^2}$;

La leucaurine $CH[C^6H^4(OH)]^3$;

La phtaline du phénol $CH\langle{}^{[C^6H^4(OH)]^2}_{C^6H^4-CO^2H}$;

La paraleucaniline $CH[C^6H^4(AzH^2)]^3$, etc.

Mais, pour colorer ces composés, il suffit de fixer sur eux 1 atome d'oxygène, qui fournit les dérivés du triphénylcarbinol $COH(C^6H^5)^3$: ceux-ci seront colorés, si deux au moins des groupes phényliques ont subi des substitutions amidées ou oxhydrilées. Nous aurons de la sorte, au lieu des corps inscrits plus haut,

La benzaurine $COH\langle{}^{C^6H^5}_{[C^6H^4(OH)]^2}$, rouge brique soluble en jaune;

L'aurine $COH[C^6H^4(OH)]^3$, en aiguilles rouges à reflets verts, soluble en rouge orangé;

La phtaléine du phénol $CO\begin{matrix}\diagup [C^6H^4(OH)]^2 \\ \diagdown C^6H^4\text{-}CO\end{matrix}$ (avec O lié entre CO et CO), incolore, mais soluble en rouge pourpre dans les alcalis;

La pararosaniline $COH[C^6H^4(AzH^2)]^3$, dont les sels verts à reflets dorés fournissent des solutions rouges d'une intensité extraordinaire.

La liste des corps ainsi obtenus est extrêmement nombreuse et beaucoup d'entre eux sont des produits tinctoriaux très importants. Je me bornerai à nommer, dans le groupe des dérivés oxhydrilés,

La fluorescéine et ses substitués haloïdes plus puissamment colorés, éosine, auréosine, érythrosine,

La galléine;

dans le groupe des dérivés amidés :

Le vert malachite,
La rosaniline,
Le violet de Paris,
Le bleu de Lyon, etc.

Nous trouvons dans la série de l'indigo un autre exemple bien net du rôle colorant de l'oxygène dans les composés à chaîne complexe. L'indol

$$C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH \diagdown\diagdown \\ \diagdown AzH \diagup\end{matrix}CH$$

est incolore, ainsi que ses dérivés oxhydrilés; mais l'isatine

$$C^6H^4\begin{matrix}\diagup CO \diagdown \\ \diagdown AzH \diagup\end{matrix}CO$$

est d'un beau rouge.

Il est probable que le rôle principal de l'oxygène dans ces introductions de la couleur consiste à neutraliser l'action décolorante de l'hydrogène, la cause primordiale de la coloration étant principalement la complexité moléculaire. Ces diverses substances soumises à une influence hydrogénante convenablement choisie ([1]) subiront une réaction inverse de celle qui les avait colorées; soit que les atomes d'oxygène y soient remplacés par des

---

([1]) Zinc en poudre, en liqueur acide ou alcaline, acide hydrosulfureux, acide sulfureux, etc.

oxhydriles, ou les oxhydriles par des atomes d'hydrogène, soit que des atomes d'hydrogène soient simplement fixés. Il en résultera toujours une décoloration. L'indigo nous offre un bel exemple du dernier mode; l'indigo bleu $C^{16}H^{10}Az^2O^2$, traité par les réducteurs, fixe 2 atomes d'hydrogène et se décolore. D'ailleurs l'indigo blanc ainsi produit régénère par oxydation l'indigo primitif.

VI. L'azote nous apparaît aussi comme un facteur important dans la coloration des corps aromatiques. Si nous laissons de côté les substitutions nitrées et nitrosées, dont le rôle chromogène a été signalé précédemment, nous trouvons que l'azote s'introduit dans les composés aromatiques par deux modes principaux : substitutions amidées et mécanisme azoïque.

Le groupe AzH^2 considéré seul est certainement incolore, comme le vérifie l'hydrazine de Curtius $(AzH^2)^2$. Toutefois, dans les combinaisons complexes, il tend à développer la couleur ou à la modifier. Ainsi le phénol dinitré jaune, soumis à une substitution amidée, devient l'acide picramique rouge grenat.

De même l'anthraquinone jaune rougeâtre donne des amidoanthraquinones rouge foncé.

Le dérivé monoamidé du triphénylcarbinol

$$COH \begin{cases} (C^6H^5)^2 \\ C^6H^4(AzH^2) \end{cases}$$

est incolore, mais ses dérivés diamidé et triamidé sont, ainsi qu'il a déjà été dit, de belles matières colorantes. Le diamidotriphénylcarbinol

$$COH \begin{cases} C^6H^5 \\ [C^6H^4(AzH^2)]^2 \end{cases}$$

est jaune et fournit des sels bleus à reflets bronzés dont la solution est pourpre.

Le triamidotriphénylcarbinol n'est autre que la pararosaniline. La rosaniline, dont les sels constituent les fuchsines, en dérive par une substitution méthylée.

Les atomes d'hydrogène des groupes amidés peuvent être remplacés par des résidus variés, méthyles, éthyles, phényles : la coloration persiste, mais avec une modification progressive de la teinte, où le bleu s'introduit de plus en plus, en raison de la complication moléculaire. La rosaniline donne du

rouge franc : la pentaméthylrosaniline constitue le violet de Paris; la triphénylrosaniline, plus complexe, est bleue, c'est le bleu de Lyon.

Les *composés azoïques* peuvent être regardés comme les dérivés, par substitution, du diimide encore inconnu

$$HAz = AzH.$$

Leur formule générale sera donc $RR'Az^2$. Ces corps sont incolores ou peu colorés, si un seul des résidus R, R' est aromatique : c'est le cas des dérivés nommés *diazoïques*.

Ainsi les sels de diazobenzène, par exemple, le sulfate $C^6H^5.Az^2.SO^4H$ sont incolores. Il en est de même du nitrate de diazonaphtalène

$$C^{10}H^7.Az^2.AzO^3.$$

Au contraire, la coloration apparaît nettement lorsque R et R' sont tous deux aromatiques, et elle se montre particulièrement intense quand l'un de ces résidus a subi une substitution oxhydrilée ou amidée.

L'azobenzène $C^6H^5.Az^2.C^6H^5$ est rouge; tous ses dérivés chlorés, bromés, sulfonés, sont jaunes ou rouges.

L'orangé III ou méthylorange, si usité comme réactif des acides forts, a comme formule $C^6H^4(SO^3H).Az^2.C^6H^3(CH^3)^2$.

L'amidoazobenzène $C^6H^5.Az^2.C^6H^4(AzH^2)$.

La chrysoïdine $C^6H^5.Az^2.C^6H^3(AzH^2)^2$ sont des matières colorantes jaunes, qui ont reçu des applications importantes.

Les naphtols α et β fournissent de même les orangés I et II :

$$C^6H^4(SO^3H).Az^2.C^{10}H^6(OH).$$

Nous citerons parmi les couleurs plus foncées ou plus puissantes les composés suivants, dont la molécule est plus compliquée :

A partir du naphtol-β :

Le rouge ponceau $C^6H^3(CH^3)^2.Az^2.C^{10}H^4(OH)(SO^3H)$;
Le rouge de Bordeaux $C^{10}H^7.Az^2.C^{10}H^4(OH)(SO^3H)$.

A partir de la naphtylamine-α :

Le rouge de Magdala $C^{10}H^7.Az^2.C^{10}H^6[AzH(C^{10}H^7)]$.

Le brun de phénylène ou *vésuvine* est constitué par les sels du triamido-

azobenzène.

$$C^6H^4(AzH^2).Az^2.C^6H^3(AzH^2)^2.$$

Le bleu d'azophénylène dérive de l'amidoazobenzène jaune par une simple substitution phénylique. C'est

$$C^6H^5.Az^2.C^6H^4[AzH(C^6H^5)].$$

L'influence décolorante de l'hydrogène apparaît nettement pour les couleurs azoïques. L'introduction de 2 atomes d'hydrogène suffit pour faire disparaître ou atténuer beaucoup la coloration du composé : il se produit des corps incolores ou peu colorés du type hydrazinique

$$RAzH - AzHR.$$

L'hydrazobenzène $(C^6H^5.AzH)^2$ est incolore. Pourtant le diamidohydrazobenzène $[C^6H^4(AzH^2)AzH]^2$ est jaune et fournit des sels rouges.

Au contraire, l'introduction de 1 atome d'oxygène au lieu de H^2 ne supprime plus la teinte : l'azo-oxybenzène $(C^6H^5)^2Az^2O$ est jaune.

Comme on vient de le voir, le groupe Az^2 *divalent* des composés azoïques entraîne avec lui l'aptitude à la coloration. Au contraire, le groupe tétravalent Az^2 des hydrazines ne semble pas, en général, doué de propriétés analogues; mais il peut toutefois se comporter de la même manière s'il entre dans la constitution de cycles fermés. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans les combinaisons des hydrazines aromatiques avec les aldéhydes ou acétones. On a la réaction

$$C^6H^5.AzH\text{-}AzH^2 + CO.RR' = H^2O + C^6H^5\text{-}Az\text{-}AzH \quad \begin{matrix} \diagdown\diagup \\ C \\ \diagup\diagdown \\ R\quad R' \end{matrix}$$

On obtient ainsi des *hydrazones* ordinairement colorées en jaune.

La teinte devient beaucoup plus forte, si deux groupes semblables se trouvent associés : c'est ce qui arrive dans les *osazones* de Fischer. La tartrazine, belle matière colorante jaune, est le dérivé disulfoné de l'osazone

$$\begin{array}{l} CO^2H \\ | \\ C\begin{cases} AzH \\ | \\ Az.C^6H^5 \end{cases} \\ | \\ C\begin{cases} AzH \\ | \\ Az.C^6H^5 \end{cases} \\ | \\ CO^2H \end{array}$$

De même, dans l'azophénylène ou *phénazine*, le groupe tétravalent Az^2 est le centre d'un double noyau cyclique

$$C^6H^4\langle\begin{matrix}Az\\ |\\ Az\end{matrix}\rangle C^6H^4.$$

Nous trouvons que c'est un corps coloré en jaune. L'introduction de groupes amidés y accroît beaucoup la teinte : une seule substitution fournit encore une couleur peu intense; deux AzH^2 procurent une matière colorante violette, nommée *violet de phénylène*.

Les 2 atomes d'azote paraissent exister en situation analogue dans la molécule d'indigo bleu. Si nous adoptons la constitution (¹)

$$C^6H^4\langle\begin{matrix}CO-CH-CH-CO\\ /\qquad\quad \backslash\\ Az\text{———}Az\end{matrix}\rangle C^6H^4,$$

nous voyons que le groupe Az^2 tétravalent est en relation cyclique avec deux groupes phénylènes. On ne peut donc s'étonner de voir la couleur s'y manifester. Ici, comme dans le cas des azoïques, la fixation de deux atomes d'hydrogène suffit pour amener la décoloration complète.

COMBINAISONS DES ÉLÉMENTS MÉTALLOIDIQUES AVEC LES ÉLÉMENTS MÉTALLIQUES.

Les corps dits métalliques ont pu être caractérisés par leur mode commun d'action sur la lumière qui tombe à leur surface (²). On a vu précédemment que cette identité optique apparente subsiste encore en quelque mesure dans les combinaisons qu'ils forment entre eux. Il n'en est plus de même pour les composés qui résultent de leur union avec les métalloïdes : on y voit se manifester des divergences extrêmes.

Chlorures et oxysels. — Ces grandes différences apparaissent tout de suite si nous comparons les divers chlorures. Quelques-uns possèdent des colorations très marquées; beaucoup, au contraire, sont incolores.

On arrive d'ailleurs à des résultats absolument identiques, si, au lieu des chlorures, on examine les combinaisons des métaux avec le brome ou

(¹) WILLM et HANRIOT, *Traité de Chimie*, t. IV, p. 549.

(²) *Voir* p. 3 et 6.

avec des résidus électronégatifs issus d'oxacides incolores par soustraction d'hydrogène, tels que

OH, AzO^2, AzO^3, IO^3, ClO^3, ClO^4, $C^2H^3O^2$, C^6H^5CO, monovalents

ou

SO^3, SO^4, CO^3, C^2O^4, $C^4H^4O^6$, bivalents

ou

PhO^4, AsO^4, $C^6H^5O^7$, trivalents.

Les colorations des sels obtenus sont, en général, semblables à celles des chlorures correspondants, et elles varient de la même manière quand on fait varier l'hydratation du composé. Quand le chlorure est incolore, les sels considérés le sont aussi.

Nous sommes ainsi amené à séparer les éléments d'éclat métallique en deux groupes distincts :

Éléments métalliques à sels colorés.
Éléments métalliques à sels incolores.

Pour se rendre compte de la composition de ces deux groupes, il convient de considérer le Tableau d'ensemble de la page 6, où les corps simples sont classés à partir de la loi périodique. Les classes s'y trouvent rangées par ordre de grandeur croissante du poids atomique de leur premier terme.

Cette liste comprend tous les éléments, sauf toutefois quelques métaux rares de la cérite et de la gadolinite, de poids atomiques supérieurs à celui du cérium : ces métaux, didyme, samarium, holmium, terbium, erbium, décipium, ytterbium, constituent une série singulière assez mal étudiée, qui ne peut jusqu'à présent rentrer dans la classification naturelle, et qui forme une sorte de prolongement au groupe des deux métaux voisins, lanthane, cérium.

Le cuivre, l'argent et l'or figurent deux fois dans le Tableau. Pour leurs combinaisons dues à la monovalence, de beaucoup les plus importantes pour l'argent, ils doivent figurer à côté du lithium et du sodium. Pour les composés issus de valences multiples, les seules dignes d'intérêt pour l'or, ils ont leur place marquée dans chacune des classes supplémentaires 16, 17, 18.

Or nous trouvons que les éléments métalliques à *sels incolores* com-

prennent tous ceux contenus dans les classes consécutives :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 (¹).

Au contraire, les classes qui occupent la partie inférieure du Tableau ne renferment que des métaux *à sels colorés*. Ce sont les classes

14, 15, 16, 17, 18.

Les classes intermédiaires 12 et 13 servent, pour ainsi dire, de transition d'un groupe à l'autre. La classe 12 contient les corps

Ti, Zr, Ce, Tho,

auxquels il convient de joindre comme annexe, ainsi qu'il a été dit plus haut, les métaux de la gadolinite

Di, Sa, Ho, Tb, Erb, Déc, Ytb,

dont les poids atomiques sont compris entre Ce et Tho.

Voici les colorations que présentent leurs composés :

	Chlorures, oxydes hydratés, ou sels d'oxacides	
	du type MR^3.	du type MR^4.
Titane	Violets.	Incolores.
Zirconium	»	Incolores.
Cérium	Incolores.	Orangés.
Thorium	»	Incolores.
Didyme	Rouges violacés(¹).	»
Samarium	Jaunes.	»
Holmium	Orangés.	»
Terbium	Jaunes ou incolores?	»
Erbium	Roses.	»
Décipium	Incolores?	»
Ytterbium	Incolores.	»

(¹) Le chlorure anhydre est rouge; le chlorure hydraté est violet.

D'après ces indications, la coloration n'apparaît encore dans la classe 12

(¹) La classe 8 ne contient pas d'éléments à éclat métallique vrai.

que d'une façon irrégulière ([1]). Elle présente encore des divergences assez marquées dans la classe 13, où nous trouvons les résultats qui suivent :

	CHLORURES, OU SELS D'OXACIDES,			
	type MR^2.	type MR^3.	type MR^4.	type MR^5
Vanadium.	(anhydre) vert... (hydraté) violet..	(Anhydre) violet. (Hydraté) vert.	(Anhydre) rouge. (Hydraté) bleu.	Rouges ([1]).
Niobium.	»	Noir métallique.	»	Incolores ([2]).
Tantale.	»	»	»	Incolores, ou jaune pâle.

([1]) Les vanadates alcalins sont incolores (neutres), ou rouges, plus ou moins foncés.
([2]) Le bromure est pourpre.

La coloration s'affirme au contraire très constante dans les classes suivantes et indique, pour les métaux qui y figurent, un pouvoir colorant très prononcé. C'est ce qui résulte bien nettement des résultats groupés dans le Tableau ci-après, pages 30 et 31.

Couleurs des sels hydratés. — En comparant, dans le Tableau de la page 30, les sels hydratés aux sels anhydres, nous trouvons qu'ils possèdent quelquefois une couleur identique, par exemple pour les composés manganeux (teinte rosée); mais, le plus souvent, la teinte est différente. L'effet ordinaire de l'hydratation est de pousser la teinte du rouge vers le violet. En s'hydratant, les sels ferriques passent du rouge au jaune, les sels de nickel du jaune au vert, les sels cuivriques du rouge au vert, puis au bleu pour un degré d'hydratation plus avancé. Certains sels, qui paraissent blancs dans l'état anhydre, prennent par fixation d'eau une teinte bien accentuée, verte pour les sels ferreux, bleue pour les sels chromeux ([2]).

Les sels de cobalt semblent faire exception à cette règle : la plupart sont bleus ou verts dans l'état anhydre, roses plus ou moins violacés dans l'état

([1]) Il convient d'ajouter que les métaux de la cérite possèdent la propriété singulière de présenter, dans leurs sels solides ou dissous, des bandes d'absorption très nettes. Ces bandes se distribuent dans le spectre visible pour Di, Sa, Ho, Erb; elles existent seulement dans l'ultraviolet pour Ce, Tb, Déc, Ytb, Tho, comme du reste dans Yt et La de la classe 11.

([2]) Le sulfate de cuivre paraît incolore quand il est anhydre : il devient bleu en s'hydratant.

hydraté ([1]); mais ce sont là des teintes complexes, qui résultent d'un mode assez compliqué d'absorption de la lumière blanche.

Sels doubles. — Les sels doubles, formés le plus souvent par de faibles affinités à partir des sels générateurs, présentent habituellement une teinte analogue à celui d'entre eux qui est coloré.

Les sels doubles étant ordinairement hydratés, leur couleur est normalement celle de l'hydrate du sel simple. Quelquefois pourtant, elle est celle du sel anhydre : ainsi le chlorure double hydraté de cuivre et de lithium est rouge comme le chlorure cuivrique anhydre ([2]). Le nitrite double hydraté de cobalt et potassium est vert au lieu d'être rose. Il est vrai que le nitrite double de nickel et potassium est rouge brun, coloration que ne possèdent les sels de nickel, ni anhydres, ni hydratés. Ce changement indique une combinaison d'ordre plus avancé que dans la plupart des sels doubles, et comparable à celui qui caractérise les chloroplatinates, les platinocyanures, les ferrocyanures et congénères.

La modification de teinte est peu marquée dans les chloroplatinates jaunes, issus du chlorure platinique rouge.

Elle l'est beaucoup plus dans la série des cyanures mixtes.

Le cyanure ferreux $FeCy^2$, à peine entrevu, est blanc, mais les ferrocyanures alcalins qui en dérivent sont colorés en jaune : le ferrocyanure ferrique est d'un bleu intense (bleu de Prusse).

Le cyanure manganeux $MnCy^2$ est couleur chair, le manganicyanure de potassium est violet foncé, celui de baryum est bleu.

Le cyanure cobalteux $CoCy^2$ rose donne un cobaltocyanure de potassium rouge; le cobaltocyanure de plomb est jaune.

Le cyanure chromique $CrCy^3$, bleu verdâtre, conduit au chromicyanure de potassium jaune.

Le cyanure d'osmium $OsCy^2$, violet, donne de même des osmocyanures diversement colorés; celui de potassium est jaune, celui de fer est bleu.

Les platinocyanures M^2PtCy^4 possèdent des colorations très remarquables dont il a été question plus haut (*voir* p. 4).

Au contraire, tandis que les sels simples d'iridium et de ruthénium sont colorés, les iridicyanures et les ruthéniocyanures alcalins sont incolores. La variation de couleur est, dans tous ces exemples, la preuve d'une combinaison énergique entre les deux sels juxtaposés dans la molécule.

([1]) Le sulfate anhydre est rose pâle.

([2]) CHASSEVENT, *Bull. Soc. chim.*, [3], t. VI, p. 3; 1891.

	ÉTAT des composés.	TYPE MR.	TYPE MR^2.	TYPE MR^3.	TYPE MR^4.	TYPE MR^5.	TYPE MR^6.	TYPE MR^7.	TYPE MR^8.
Chrome.......	Anhydr..	»	Blanc.	Violet clair.	»	»	Rouge ou jaune ([1]).	»	»
	Hydr....	»	Bleu.	Vert ou violet.	»	»		»	»
Molybdène	Anhydr..	»	Jaune.	Rouge foncé ([2])	Jaune ([3]), noir.	Noir ([4]).	Rouge ([5]), Jaune.	»	»
	Hydr....	»	»	Pourpre.	Rouge.	»	Incolores.	»	»
Tungstène.....	Anhydr..	»	Gris.	»	Gris.	Noir ([6]).	Noir ([7]), Rouge.	»	»
	Hydr....	»	»	»	Pourpre.	»	Incolore.	»	»
Uranium	Anhydr..	»	»	Brun.	Gris ou brun ([8])	Vert foncé.	Jaunes ([9]).	»	»
	Hydr....	»	»	»	Verts.	»	Id.	»	»
Manganèse	Anhydr..	»	Chair.	Brun ([10]).	Brun ([11]).	»	Vert ([12]).	Pourpre ([13]).	»
	Hydr....	»	Id.	Brun rouge.	»	»	»	»	»
Fer ([14]).......	Anhydr..	»	Blanc.	Rouge.	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	Vert clair.	Rouge ou jaune	»	»	Rouge violacé ([15])	»	»
Nickel.........	Anhydr..	»	Jaune clair.	»	»	»	»	»	Incolore ([16]).
	Hydr....	»	Vert.	»	»	»	»	»	»
Cobalt	Anhydr..	»	Bleu.	»	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	Rose violacé.	Bleu ([17]).	»	»	»	»	»
Cuivre.........	Anhydr..	Incolore ([18]).	Rouge ([19]) ou bleu clair.	»	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	Bleu ou vert.	»	»	»	»	»	»
Ruthénium	Anhydr..	»	Noir.	Orangé.	Rouge brun.	»	Rouges ([20]).	»	Noirs ([21]).
	Hydr....	»	Bleu.	Id.	Id.	»	Id.	»	Rouge orangé.
Rhodium	Anhydr..	»	»	Rouge.	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	»	Id.	»	»	»	»	»

Palladium	Anhydr..	»	Rouge brun.	»	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	Id.	»	»	»	»	»	»
Argent	Anhydr..	Incolore.	»	»	»	»	»	»	»
	Hydr....	Id.	»	»	»	»	»	»	»
Osmium	Anhydr..	»	Violet.	»	Rouge.	»	Rose (22).	»	Jaune (23).
	Hydr....	»	Id.	»	Jaune.	»	»	»	»
Iridium	Anhydr..	»	»	»	Rouge brun.	»	»	»	»
	Hydr....	»	»	Vert olive.	Id.	»	»	»	»
Platine	Anhydr..	»	Brun.	»	Rouge (24).	»	»	»	»
	Hydr....	»	»	»	Id.	»	»	»	»
Or	Anhydr..	Jaune (25).	»	Rouge.	»	»	»	»	»
	Hydr....	»	»	Rouge orangé.	»	»	»	»	»

(1) Dans l'oxychlorure, l'acide chromique dissous, les chromates.

(2) Le bromure est vert très foncé.

(3) Le chlorure est jaune; le bromure et les sels anhydres paraissent noirs.

(4) Sa vapeur est rouge.

(5) L'oxychlorure et l'oxybromure sont rouges; l'hydrate molybdique est jaune; les molybdates alcalins sont incolores.

(6) Le chlorure $TuCl^6$ est noir, soluble en bleu dans le sulfure de carbone.

(7) Les hydrates tungstiques sont jaunes ou incolores. Le chlorure $TuCl^4$ est noir, à vapeur rouge. Les tungstates alcalins sont incolores.

(8) L'hydrate uraneux est brun rouge; le chlorure est gris.

(9) Dans l'hydrate uranique, l'oxychlorure, les sels et les uranates.

(10) Dans l'hydrate manganique.

(11) Dans l'hydrate de peroxyde.

(12) Dans les manganates alcalins.

(13) Dans l'acide permanganique et ses sels alcalins; l'anhydride permanganique donne des vapeurs violettes et se dissout en vert dans l'acide sulfurique.

(14) Les ferrocarbonyles, récemment découverts par L. Mond et Langer, sont colorés en jaune. L'un d'eux, $Fe^2(CO)^7$, en cristaux jaune d'or, se rapporterait à l'heptavalence du fer. L'autre, liquide, aurait comme formule $Fe(CO)^5$, ce qui indiquerait la décavalence du fer ou une constitution cyclique (*Soc. chim. de Londres*, nov. 1891).

(15) Dans les ferrates alcalins.

(16) Dans le carboxyde de nickel $Ni(CO)^4$ découvert par Mond, Langer et Quincke (*Chem. Soc.*, t. LVII, p. 749).

(17) Dans les sels cobaltiques [Marshall, *Bull. Soc. chim.*, t. VII, p. 53; 1892 (3)].

(18) Dans le chlorure cuivreux.

(19) Le chlorure cuivrique anhydre est rouge, ainsi que le chlorhydrate cuivrique (quoique hydraté) (Sabatier, *Bull. Soc. chim.*, t. L, p. 86).

(20) Dans les ruthénates alcalins, dont les cristaux, rouges par transparence, ont une couleur superficielle noire à reflets verts.

(21) Dans les hyperruthénates alcalins, les solutions d'anhydride hyperruthéniques sont jaunes d'or.

(22) Dans les osmites alcalins.

(23) Dans les osmiates alcalins.

(24) Dans le chlorure platinique et les platinates alcalins.

(25) Dans les chlorure, bromure, iodure, fluorure aureux.

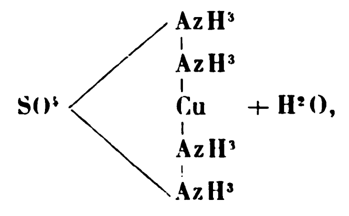
Sels acides. — On rencontre pour les sels acides des particularités analogues à celles que nous ont offertes les sels doubles. Les chlorhydrates cuivrique et cobalteux ([1]) ont, quoique hydratés, la teinte des chlorures anhydres, rouge pour le cuivre, bleu pour le cobalt. Mais la coloration jaune verdâtre du chlorhydrate ferrique ([2]) est fort différente de la couleur rouge du chlorure ferrique anhydre, ou de la couleur jaune du chlorure hydraté.

L'acide platinocyanhydrique possède le dichroïsme caractéristique de ses sels. Au contraire, les acides ferrocyanhydrique, ferricyanhydrique, cobalticyanhydrique, etc., dont les sels alcalins sont colorés, sont eux-mêmes incolores. C'est une conséquence du pouvoir décolorant de l'hydrogène, si souvent constaté dans les composés organiques.

Sels de métaux ammoniés. — Les sels ammoniacaux isomorphes des sels de potasse sont incolores comme eux, toutes les fois qu'ils proviennent d'un liquide non coloré. Les sels doubles, qui en résultent avec les divers sels métalliques, se présentent aussi avec des caractères extérieurs très semblables aux sels doubles potassiques.

Il n'en est plus de même des corps qui résultent de la fixation de une ou plusieurs molécules de gaz ammoniac sur les sels métalliques déjà colorés, et qui sont en réalité les sels de véritables *ammonium* complexes, où certains atomes métalliques se trouvent substitués à des atomes d'hydrogène. La coloration se trouve alors fortement modifiée et le plus souvent est remplacée par une teinte plus foncée.

Les sels cuivriques hydratés sont verts ou bleus. Mais les sels cuprico-ammoniques possèdent pour la plupart une couleur bleue foncée ou violette. Le sulfate de cuivre ammoniacal ordinaire,



cristallise en magnifiques aiguilles bleu indigo.

([1]) P. SABATIER, *Bull. Soc. chim.*, t. L, p. 86. — *Comptes rendus*, t. CVII, p. 42.
([2]) P. SABATIER, *Bull. Soc. chim.*, t. XXXVI, p. 197; 1881.

Les sels de nickelamines n'ont plus, comme les sels nickeliques ordinaires, la teinte verte dans l'état hydraté, jaune dans l'état anhydre : ils sont bleus (chlorure, iodure, nitrate), violets (sulfate, sulfite), ou rouge cerise (nitrite).

Les sels de cobaltamines forment plusieurs séries très importantes, dont les couleurs sont assez variées : pourpres (purpuréocobaltiques), rouges groseille (roséocobaltiques), jaunes plus ou moins foncés (xantho- et lutéocobaltiques), bruns (fuscocobaltiques), verts olive (oxycobaltiques).

Le chlorure platineux, qui forme, avec les chlorures alcalins, ainsi qu'avec le chlorhydrate d'ammoniaque, des sels doubles rouge pourpre, fournit au contraire avec l'ammoniaque le composé

$$Pt\begin{cases} AzH^3Cl \\ AzH^3Cl \end{cases}$$

qui se présente soit en aiguilles *vertes* (sel de Magnus), soit en lamelles jaunes (sel de Reiset).

Iodures. — L'aptitude colorante de l'iode étant supérieure à celle du chlore, il en résulte que la coloration appartient, non seulement aux iodures de *tous* les métaux à chlorures colorés, mais encore à quelques autres dont les chlorures sont incolores, et qui ont pour la plupart des poids atomiques élevés.

En voici la liste, avec les colorations présentées par les iodures :

CLASSE.	MÉTAL.	COULEUR DE L'IODURE, DE FORMULE			
		MI.	MI^2.	MI^3.	MI^4.
2	Argent........	Jaune.	»	»	»
3	Mercure.......	Jaune, rouge.	Jaune, rouge.	»	»
4	Gallium.......	»	»	Jaune.	»
4	Indium........	»	»	Jaune.	»
4	Thallium......	Vert, jaune ou rouge.	»	Brun.	»
5	Silicium.......	»	»	»	Rouge.
5	Germanium....	»	»	»	Jaune.
5	Étain.........	»	Rouge.	»	Orangé.
5	Plomb........	»	Jaune.	»	»
6	Arsenic.......	»	»	Rouge.	»
6	Antimoine.....	»	»	Rouge ou jaune.	»
6	Bismuth.......	»	»	Gris noir.	»

Nous laissons de côté dans cette liste le tellure, qui donne des composés haloïdiques colorés, semblables à ceux du soufre et du sélénium ; ces corps, formés avec peu de chaleur, possèdent presque entièrement le pouvoir absorbant des atomes colorés qui y figurent.

Oxydes. — Les combinaisons des métaux avec l'oxygène, élément incolore, nous renseignent mieux sur l'aptitude chromogène des éléments métalliques. La coloration se manifeste pour *tous les oxydes* des métaux à chlorures colorés, et aussi pour ceux d'un certain nombre d'autres qui appartiennent aux classes 2, 3, 4, 5, 6, et se trouvent indiqués dans le Tableau suivant :

CLASSE.	MÉTAL.	COULEUR DES OXYDES, DE FORMULE				
		M^2O.	MO.	M^2O^3.	MO^2.	M^2O^5.
2	Cuivre.........	Rouge.	Noir.	»	»	»
2	Argent.........	Brun.	»	Noir.	»	»
3	Zinc...........	»	Jaune (1).	»	»	»
3	Cadmium.......	»	Brun.	»	»	»
3	Mercure........	Noir.	Rouge.	»	»	»
4	Indium.........	»	»	Jaune.	»	»
4	Thallium.......	Noir (jaune).	»	Noir.	»	»
5	Germanium.....	»	Brun.	»	Blanc.	»
5	Étain..........	»	Noir, vert ou rouge.	»	Jaune, noir.	»
5	Plomb.........	»	Rougeâtre.	»	Marron.	»
6	Antimoine......	»	»	Incolore.	»	Jaune.
6	Bismuth........	»	Noir.	Jaune.	»	Brun.

(1) A chaud seulement (comme l'oxyde de niobium). A froid, l'oxyde est blanc.

Ces résultats confirment l'aptitude, déjà reconnue dans l'oxygène, à la production de corps colorés. La complication moléculaire fonce généralement la teinte. La litharge PbO est peu colorée en jaune rougeâtre; le minium Pb^3O^4 possède une fort belle teinte rouge.

L'acide chromique CrO^3 est rouge; l'oxyde chromique Cr^2O^3 est vert foncé.

Cette règle présente pourtant beaucoup d'exceptions : le mercure donne un protoxyde HgO rouge, tandis que le sous-oxyde de Hg^2O est noir. L'oxyde bismutheux est noir, tandis que l'oxyde Bi^2O^3 est jaune, et l'oxyde Bi^2O^5 est brun. Il est probable que les sous-oxydes à coloration sombre correspondent à une complication moléculaire assez grande.

La coloration des oxydes, comparée à celle des sels et des chlorures, établit, dans le groupe des éléments métalliques, une nouvelle subdivision. Le Tableau qui suit comprend toute la série des éléments simples, et montre bien avec quelle régularité la coloration se distribue dans les classes successives.

RANG de la famille.	COMPOSITION de la famille par ordre croissant de poids atomiques.	ÉLÉMENTS SANS ÉCLAT MÉTALLIQUE		ÉLÉMENTS A ÉCLAT MÉTALLIQUE		
				à sels incolores.		à sels colorés.
		incolores.	colorés.	Oxydes incolores.	Oxydes colorés.	
1	H....................	H.	»	»	»	»
2	Li, Na, Cu, Ag, ..., Au...	»	»	Li, Na.	Cu', Ag.	»
3	Gl, Mg, Zn, Cd, ..., Hg..	»	»	Gl, Mg.	Zn, Cd, Hg.	»
4	B, Al, Ga, In, ..., Tl....	»	B.	Al, Ga	In, Tl.	»
5	C, Si, Ge, Sn, ..., Pb ...	C.	(C), Si.	(Si), Ge.	Sn, Pb.	»
6	Az, Ph, As, Sb, ..., Bi...	Az, Ph.	(Ph).	As.	Sb, Bi.	»
7	O, S, Se, Te............	O.	(O), S, Se.	(Se), Te.	»	»
8	Fl, Cl, Br, I............	»	Fl, Cl, Br, I.	»	»	»
9	K, Rb, Cœ.............	»	»	K, Rb, Cœ.	»	»
10	Ca, St, Ba.............	»	»	Ca, St, Ba.	»	»
11	Sc, Yt, La, Di..........	»	»	Sc, Yt, La,	»	»
12	Ti, Zr, Ce, ..., Tho.....	»	»	Zr, Tho.	»	Ti, Ce.
13	Va, Nb, ..., Ta........	»	»	»	»	Va, (Nb), (Ta).
14	Cr, Mo, ..., Tu, Ur.....	»	»	»	»	Cr, Mo, Tu, Ur.
15	Mn..................	»	»	»	»	Mn.
16	Fe, Ni, Co, (Cu)........	»	»	»	»	Fe, Ni, Co, (Cu'').
17	Ru, Rh, Pd. (Ag).......	»	»	»	»	Ru, Rh, Pd, (Ag''').
18	Os, Ir, Pt, (Au)..	»	»	»	»	Os, Ir, Pt, (Au''').

Sulfures métalliques. — La coloration des sulfures métalliques concorde fort bien avec celle des oxydes, mais elle correspond généralement à une absorption lumineuse plus intense : un grand nombre d'entre eux sont noirs. C'est le cas de tous les sulfures des classes 14, 15, 16, 17, 18, où les sels sont, au contraire, brillamment colorés. Le sulfure manganeux est une exception à cette règle : il est blanc rosé comme les autres sels [1].

Les sulfures normaux, issus des métaux alcalins et alcalino-terreux, sont incolores comme les oxydes et les sels. Mais les polysulfures sont colorés en jaune ou rouge d'autant plus intense que la quantité de soufre ajouté est plus grande. Le soufre n'est introduit dans ces composés que par des affinités peu énergiques : aussi ses atomes successifs s'y superposent en additionnant leur teinte propre.

(1) Le sulfure manganique MnS^2 est noir.

CONCLUSIONS.

Quelques règles générales se dégagent de l'ensemble des faits.

1° Parmi les éléments chimiques, un certain nombre sont colorés ou aptes à donner des produits colorés par leur union avec le chlore ou les résidus d'oxacides incolores. Cette distinction coïncide avec la classification des corps simples par la loi périodique, les corps à sels colorés se trouvant tous groupés dans plusieurs classes voisines.

2° Quelques éléments sont non seulement incolores, mais *décolorants*, leur juxtaposition à certains groupes colorés tendant à affaiblir ou même à supprimer la teinte : ce sont surtout l'hydrogène, le carbone, le silicium, le bore, ainsi que les métaux à oxydes incolores.

Au contraire, certains éléments incolores, oxygène, azote, contribuent d'ordinaire à développer la couleur par leur substitution ou leur addition dans des molécules déjà colorées, et peuvent même la développer dans des atomes non chromogènes de poids atomiques élevés.

3° La complication moléculaire est favorable à la coloration. Ainsi que Græbe et Liebermann l'avaient observé dès 1868 ([1]), les liaisons multiples entraînent fréquemment l'aptitude à la couleur. C'est pour cette raison que les groupes O−O, Az=Az, sont des *chromophores* bien nets. La rupture des liaisons tend toujours à diminuer ou à supprimer la teinte.

Pour les corps à valences multiples, tels que les métaux des classes 14 à 18, les valences élevées fournissent habituellement une absorption plus énergique de la lumière blanche.

4° Dans les composés dus à de faibles affinités, la coloration des constituants se conserve très bien, plus ou moins modifiée. On en a cité plusieurs exemples, notamment les polysulfures, et divers produits organiques d'addition bromée ou sulfurée. Nous pouvons y joindre le bromure de diazobenzène, sel incolore, qui, par fixation de 1 molécule de brome, devient un composé instable jaune. Par addition de 1 molécule d'iode, le sulfate neutre de quinine, incolore, fournit l'hérapathite en lames jaunes verdâtres.

Au contraire, les grandes affinités chimiques, manifestées d'ordinaire

---

([1]) *Deutsche chem. Gesell.*, t. I, p. 106.

par un grand dégagement de chaleur, diminuent ou suppriment la coloration primitive.

Ces diverses relations nous montrent quels liens étroits existent entre la constitution moléculaire des corps et l'absorption qu'ils exercent sur les diverses radiations. La connaissance exacte de cette dépendance est un problème très complexe, dont la solution paraît encore bien lointaine. Dans ce premier travail, que je me propose de poursuivre, j'ai cherché surtout à établir certaines conclusions générales, autour desquelles devront se grouper des études plus détaillées.

SUR

LA CYCLIDE DE DUPIN,

PAR M. E. COSSERAT,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Toulouse,
Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences.

I. — *Formules relatives à la cyclide générale de Dupin, rapportée à ses lignes de courbure.*

La cyclide de Dupin doit être comptée parmi les plus remarquables des surfaces particulières; nous allons montrer comment on peut aisément constituer, à l'égard de cette surface, un Tableau de formules analogue à celui que l'on trouve pour l'ellipsoïde au Tome II (p. 379 et suiv.) des *Leçons* de M. Darboux.

On sait (¹) que l'on obtient la même cyclide générale de Dupin, soit en cherchant l'enveloppe de la sphère

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2-u_1^2=0,$$

où x', y' sont des fonctions de u_1 définies par les équations

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0, \qquad x'=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}(u_1-k),$$

soit en cherchant l'enveloppe de la sphère

$$(x-x'')^2+y^2+(z-z'')^2-v_1^2=0,$$

où x'', z'' sont des fonctions de v_1, définies par les équations

$$\frac{x''^2}{a^2-b^2}-\frac{z''^2}{b^2}-1=0, \qquad x''=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(v_1-k).$$

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 268.

Cette proposition de Dupin permet de trouver simplement les expressions des coordonnées rectangulaires d'un point de la surface en fonction des paramètres u_1 et v_1. Il en résulte, en effet, que les coordonnées d'un point de la surface satisfont aux quatre équations compatibles

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - 2y'y + b^2 + k^2 - 2ku_1 = 0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(x - \frac{b^2}{a^2 - b^2}\frac{x'}{y'}y\right) + k = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x''x - 2z''z - b^2 + k^2 - 2kv_1 = 0,$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\left(x + \frac{b^2}{a^2 - b^2}\frac{x''}{z''}z\right) + k = 0,$$

que l'on résout immédiatement en remarquant que l'on obtient une équation linéaire en retranchant la première et la troisième équation.

Posons

$$u_1 = \frac{1}{u}, \qquad v_1 = \frac{1}{v}.$$

Il vient

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{b^2 - ka^2u + k(a^2 - b^2)v}{a\sqrt{a^2 - b^2}(u - v)},\\ y &= \frac{b\sqrt{u^2 - \dfrac{(1 - ku)^2}{a^2 - b^2}}}{u - v},\\ z &= -\frac{b\sqrt{-v^2 + \dfrac{(1 - kv)^2}{a^2}}}{u - v}. \end{aligned}\right.$$

La surface est rapportée à ses lignes de courbure, en vertu de la signification géométrique des paramètres u et v; cela résultera aussi, d'ailleurs, de ce qui va suivre.

Remarquons qu'il serait bien facile de transformer les expressions de x, y, z sans changer les courbes coordonnées, de façon à obtenir des fonctions rationnelles des nouveaux paramètres et à mettre ainsi en évidence la représentation de la surface sur le plan.

Appliquons maintenant les considérations développées par M. Darboux (*Leçons*, t. II, p. 376 et suiv.) au calcul des fonctions qui interviennent dans les formules de Codazzi.

On trouve, pour définir le carré de l'élément linéaire,

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

les formules

$$\mathrm{E} = \frac{1}{[\mathrm{U}(u-v)]^2}, \qquad \mathrm{G} = \frac{1}{[\mathrm{V}(u-v)]^2}$$

en posant

$$\mathrm{U} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)u^2-(1-ku)^2}}{b}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\sqrt{-a^2v^2+(1-kv)^2}}{b}.$$

Calculons les quantités D, D′, D″ définies par l'identité

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Il vient

$$\mathrm{D} = \frac{v}{\mathrm{U}^3\mathrm{V}(u-v)^4}, \qquad \mathrm{D}' = 0, \qquad \mathrm{D}'' = \frac{u}{\mathrm{U}\mathrm{V}^3(u-v)^4}.$$

Si l'on suppose que les axes des x et des y du trièdre (T) coïncident avec les tangentes aux lignes coordonnées (v) et (u), on trouve ensuite

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \xi = \sqrt{\mathrm{E}}, & \xi_1 = 0, \\ \eta = 0, & \eta_1 = \sqrt{\mathrm{G}}, \\ p = 0, & p_1 = \dfrac{u}{\mathrm{V}(u-v)}, \\ q = -\dfrac{v}{\mathrm{U}(u-v)}, & q_1 = 0, \\ r = -\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}(u-v)}, & r_1 = -\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}(u-v)}. \end{array}\right.$$

Les formules (1) et (2) contiennent tous les éléments nécessaires pour l'étude complète de la surface.

L'équation des asymptotiques sera

$$\frac{du^2}{u\mathrm{U}^2} = \frac{dv^2}{v\mathrm{V}^2};$$

c'est-à-dire

$$\frac{du^2}{u[(a^2-b^2)u^2-(1-ku)^2]}=\frac{dv^2}{v[-a^2v^2+(1-kv)^2]}.$$

Les rayons de courbure principaux auront pour valeurs

$$R=\frac{1}{v}, \qquad R'=\frac{1}{u}.$$

Sur chaque ligne de courbure, le rayon principal correspondant reste constant.

II. — *Application des formules précédentes.*

M. O. Bonnet a démontré, comme application des formules de Codazzi (¹), que si une surface est telle que sur chaque ligne de courbure le rayon principal correspondant à cette ligne soit constant, la surface est une cyclide de Dupin. Les formules précédentes permettent d'arriver directement à ce résultat.

Remarquons, avec M. Bonnet, que les lignes (u) et (v) étant les lignes de courbure d'une surface, les axes des x et des y du trièdre (T) coïncidant avec les tangentes aux lignes coordonnées et l'élément linéaire étant pris sous la forme

$$ds^2=A^2du^2+C^2dv^2,$$

les relations

$$R=-\frac{A}{q}, \qquad R'=\frac{C}{p_1}$$

permettent de substituer R, R' à q et à p_1 dans les équations de Codazzi. On obtient ainsi le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{R'}-\dfrac{1}{R}\right)\dfrac{\partial \log A}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{1}{R'}}{\partial u} = -\left(\dfrac{1}{R'}-\dfrac{1}{R}\right)\dfrac{\partial \log C}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial C}{\partial u}\right)+\dfrac{AC}{RR'}=0, \end{cases}$$

(¹) O. BONNET, *Addition au Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier, p. 120).

qui contient toutes les relations existant entre les rayons de courbure principaux et l'élément linéaire de la surface.

Ceci posé, dans le cas actuel, nous pouvons choisir les paramètres u et v, de façon que l'on ait

$$R = \frac{1}{v}, \qquad R' = \frac{1}{u}.$$

Portons ces valeurs dans les deux premières équations (3), il vient

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} = \frac{1}{u-v},$$

$$\frac{\partial \log C}{\partial u} = -\frac{1}{u-v};$$

donc, si l'on désigne par U une fonction de u et par V une fonction de v, on a

$$A = \frac{1}{U(u-v)},$$

$$C = \frac{1}{V(u-v)}.$$

Il reste à voir si l'on peut déterminer les fonctions U et V de façon que la troisième des équations (3) soit vérifiée, c'est-à-dire de façon que l'on ait l'identité

$$(u-v)\left(\frac{dU^2}{du} - \frac{dV^2}{dv}\right) - 2U^2 - 2V^2 - 2uv = 0.$$

Or, si l'on différentie deux fois par rapport à u, on trouve

$$\frac{d^3 U^2}{du^3} = 0.$$

En différentiant deux fois par rapport à v, on trouve de même

$$\frac{d^3 V^2}{dv^3} = 0.$$

Il en résulte que U^2 et V^2 ne peuvent être que deux trinômes du second degré en u et v

$$U^2 = lu^2 + 2mu + n,$$

$$V^2 = l_1 v^2 + 2m_1 v + n_1.$$

Si l'on substitue ces expressions dans l'identité, on trouve

$$l + l_1 + 1 = 0, \qquad m + m_1 = 0, \qquad n + n_1 = 0;$$

donc, en désignant par a, b, k trois nouvelles constantes, en général, U^2 et V^2 ont les expressions suivantes

$$U^2 = \frac{(a^2 - b^2)u^2 - (1 - ku)^2}{b^2},$$

$$V^2 = \frac{-a^2v^2 + (1 - kv)^2}{b^2}.$$

La surface cherchée est, par suite, constituée, ainsi qu'on le voit immédiatement, par l'une des différentes formes de la cyclide de Dupin.

III. — *Surface moyenne et développée moyenne de la cyclide de Dupin.*

Considérons la surface moyenne (M) d'une cyclide de Dupin (D), c'est-à-dire la surface formée par le lieu du milieu M du segment limité par les centres de courbure principaux de (D). C'est une surface du quatrième ordre ayant une conique double et quatre points doubles, ces derniers à l'infini.

Les normales de la cyclide de Dupin rencontrent deux coniques focales l'une de l'autre; il en résulte qu'il existe sur (M) un système conjugué formé de coniques dont les plans sont respectivement parallèles à deux plans fixes rectangulaires.

Ce système conjugué est la trace sur (M) des développables de la congruence formée par les normales de (D); la surface (M) correspond donc par orthogonalité des éléments à une surface minima telle que l'image sphérique de ses asymptotiques coïncide avec l'image sphérique des lignes de courbure de (D). La surface adjointe de cette surface minima aura même représentation sphérique de ses lignes de courbure que (D) et sera, par conséquent, une surface minima à lignes de courbure planes de M. O. Bonnet. Donc :

La surface moyenne de la cyclide de Dupin correspond par orthogonalité des éléments à la surface adjointe d'une surface minima à lignes de courbure planes de M. O. Bonnet.

Considérons maintenant la développée moyenne de la cyclide de Dupin (D), c'est-à-dire la surface enveloppe du plan mené perpendiculairement à chaque normale de (D) au point qui est à égale distance des centres de courbure principaux relatifs à la normale considérée. Les normales de (D) rencontrant deux courbes, il en résulte qu'aux lignes de courbure de la cyclide de Dupin correspondent sur sa développée moyenne des courbes formant un système conjugué; d'ailleurs, ce système conjugué est formé des lignes de courbure, puisque la correspondance entre les deux surfaces est établie par plans tangents parallèles; on peut donc énoncer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour :

La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

Il résulte de ce théorème la proposition suivante :

La développée moyenne de la cyclide de Dupin est une surface dont toutes les lignes de courbure sont planes.

SUR LA

COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES QUATERNAIRES

ET SES APPLICATIONS AUX GROUPES FUCHSIENS,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

I.

Soit la forme quadratique quaternaire

$$\Phi(x,y,z,u) = A(x^2+u^2) + A'y^2 + A''z^2 + (By+Cz)(x-u) + Dxu + Eyz, \tag{1}$$

avec les relations

$$\frac{A}{A'} = \frac{A''}{A} = -\frac{C}{B}, \qquad A(D+E) = BC; \tag{2}$$

je considère les équations

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= X[-(A+D)x + Cz - Au] \\ &\quad + Y[Bx + A'y + (E-A)z - Ba] + Z(Ay + A''z) + U(-Ax - Cz + Au), \\ y_1 &= X[-(A+D)y + A''z] \\ &\quad + Y[-Ax - Cz - (A+D)u] + Z(-A''x + Cy + A''u) + U(-Ay - A''z), \\ z_1 &= X(-A'y - Az) \\ &\quad + Y(A'x - Bz - A'u) + Z[-(A+D)x + By - Au] + U[A'y - (A+D)z], \\ u_1 &= X(Ax + By - Au) \\ &\quad + Y(A'y + Az) + Z[Cx + (E-A)y + A''z - Cu] + U[-Ax - By - (A+D)u]; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

nous dirons que le système x_1, y_1, z_1, u_1 résulte de la *composition* du sys-

---

([1]) Cette forme quadratique a été obtenue en remplaçant dans la forme (16) (*voir* plus loin) les coefficients numériques par des lettres et en attribuant à ces lettres les propriétés évidentes de ces coefficients.

Comparer deux Notes de M. Bianchi : *Sopra una classe di gruppi fuchsiani reducibili a gruppi modulari* et *Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1890, 1891), et le Mémoire fondamental de M. Picard : *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I.

tème X, Y, Z, U avec le système x, y, z, u, et nous écrirons

$$(x_1, y_1, z_1, u_1) = (X, Y, Z, U)(x, y, z, u).$$

Désignons par

$$\begin{matrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24}, \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33}, & \lambda_{34}, \\ \lambda_{41}, & \lambda_{42}, & \lambda_{43}, & \lambda_{44} \end{matrix}$$

les coefficients de X, Y, Z, U dans les équations (3). On peut se proposer d'ordonner les équations (3) par rapport à x, y, z, u, et l'on arrive au résultat suivant :

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \Lambda_{33}x + \Lambda_{42}y + \Lambda_{43}z - \Lambda_{41}u, \\ y_1 = \Lambda_{24}x + \Lambda_{11}y - \Lambda_{23}z + \Lambda_{21}u, \\ z_1 = \Lambda_{34}x - \Lambda_{32}y + \Lambda_{44}z + \Lambda_{31}u, \\ u_1 = \Lambda_{14}x + \Lambda_{12}y + \Lambda_{13}z + \Lambda_{22}u. \end{cases}$$

Ici chacun des coefficients Λ n'est autre que le coefficient désigné précédemment par la lettre minuscule correspondante où l'on a remplacé x, y, z, u respectivement par X, Y, Z, U.

On peut aussi se proposer de résoudre les équations (3) par rapport à X, Y, Z, U. Pour les résoudre par rapport à X, par exemple, je les ajoute après les avoir multipliées respectivement par $-\lambda_{22}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$ et, en opérant d'une manière analogue pour trouver les valeurs de Y, Z, U, il vient

$$(5) \quad \begin{cases} X = \dfrac{-\lambda_{22}x_1 + \lambda_{12}y_1 + \lambda_{13}z_1 + \lambda_{14}u_1}{(-D - 2A)\Phi(x, y, z, u)}, \\ Y = \dfrac{\lambda_{21}x_1 - \lambda_{11}y_1 + \lambda_{23}z_1 + \lambda_{24}u_1}{(-D - 2A)\Phi(x, y, z, u)}, \\ Z = \dfrac{\lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}y_1 - \lambda_{44}z_1 + \lambda_{34}u_1}{(-D - 2A)\Phi(x, y, z, u)}, \\ U = \dfrac{\lambda_{41}x_1 + \lambda_{42}y_1 + \lambda_{43}z_1 - \lambda_{33}u_1}{(-D - 2A)\Phi(x, y, z, u)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$(-u, y, z, -x)(x, y, z, u) = [\Phi(x, y, z, u), 0, 0, \Phi(x, y, z, u)].$$

Nous dirons que les deux systèmes

$$(-u, y, z, -x), \qquad (x, y, z, u)$$

sont *inverses l'un de l'autre*.

$z, u) = 0$

o :

rré parfait. Pour
ts des racines de
s de l'unité. Ainsi,
, lorsque les coeffi-

défini dans un travail
de la forme

$\beta_h = 3\beta'_h,$

unité. De plus, la substitu-
n changeant dans S_j j en j^2,
) soient identiques.

avail en question et en expri-
S_j est égal à l'unité, on trouve,

1;

valeurs entières de α_1, β_1, γ_1, δ_1;

---

les *racines d'équations binômes* (*An-*

On vérifie aisément les relations

$$(10)\quad \begin{cases} \mu_{12} + \mu_{42} = \mu_{13} + \mu_{43} = 0, \\ \mu_{11} + \mu_{41} = \mu_{14} + \mu_{44} = -(D + 2A)\,\Phi(x, y, z, u), \\ \mu_{21} + \mu_{24} = \mu_{31} + \mu_{34} = 0, \\ \mu_{11} + \mu_{14} = \mu_{41} + \mu_{44} = -(D + 2A)\,\Phi(x, y, z, u); \end{cases}$$

il en résulte

$$(11)\quad X' + U' = -(D + 2A)(X + U)\,\Phi(x, y, z, u).$$

II.

Nous appellerons *système unité* un système x, y, z, u tel que les valeurs de x_1, y_1, z_1, u_1 fournies par les équations (3) soient proportionnelles à celles de X, Y, Z, U, quels que soient X, Y, Z, U. Pour cela, il faut, entre autres conditions, que l'on ait

$$\begin{aligned} -(A + D)y + A'z &= 0, \\ -Ay - A'z &= 0, \\ -A'y - Az &= 0, \\ A'y - (A + D)z &= 0, \end{aligned}$$

et en ajoutant membres à membres la première et la seconde de ces équations, puis la troisième et la quatrième, on trouve que y et z doivent être nuls. On voit ensuite facilement que z doit être égal à u.

Un système est nommé *périodique* quand une de ses puissances sera le système unité. En effet, les puissances successives d'un pareil système reproduisent périodiquement les mêmes systèmes. Dire qu'un système est périodique, cela revient à dire que les équations (3) représentent une substitution linéaire périodique des variables X, Y, Z, U aux variables x_1, y_1, z_1, u_1.

On sait que l'étude de la périodicité d'une substitution linéaire d'un nombre quelconque de variables a lieu au moyen de l'équation déterminante qui est ici

$$(12)\quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \theta & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - \theta & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} - \theta & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, il vient

$$\begin{aligned}&\theta^4+2\theta^3(x+u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\\&\quad+[(\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2(x+u)^2+2(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\Phi(x,y,z,u)]\theta^2\\&\quad+2\theta(\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2\Phi(x,y,z,u)(x+u)+(\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2\Phi^2(x,y,z,u)=0\end{aligned}$$

ou

$$(13)\qquad [\theta^2+(x+u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\theta+\Phi(x,y,z,u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})]^2=0:$$

ainsi le premier membre de l'équation déterminante est carré parfait. Pour qu'un système soit périodique, il faudra que les rapports des racines de l'équation précédente pour ce système soient des racines de l'unité. Ainsi, un système ne peut présenter que les périodes 2, 3, 4, 6, lorsque les coefficients de la forme (1) sont rationnels.

III.

Voici une application. Je considère le groupe G_{13} défini dans un travail antérieur (¹), dont une substitution quelconque est de la forme

$$\mathrm{S}_j\left|\,z,\ \frac{z\sum_{h=1}^{6}\alpha_h(j^h-j^{-h})+\sum_{h=1}^{6}\beta_h(j^h+j^{-h})}{z\sum_{h=1}^{6}\gamma_h(j^h+j^{-h})+\sum_{h=1}^{6}\delta_h(j^h+j^{-h})}\right|,\qquad \beta_h=3\beta'_h,$$

où le déterminant des coefficients est égal à l'unité. De plus, la substitution S_j est telle que la substitution, obtenue en changeant dans S_j j en j^2, et la transformée de S_j par $\sum=\left(z,\ \frac{6z+3}{-7z-3}\right)$ soient identiques.

En utilisant les formules données dans le travail en question et en exprimant que le déterminant des coefficients de S_j est égal à l'unité, on trouve, pour une substitution impaire,

$$(14)\qquad 13(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)=1;$$

on ne peut vérifier cette équation par des valeurs entières de α_1, β_1, γ_1, δ_1;

(¹) *Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1891).

donc *le groupe* G_{13} *ne contient pas de substitutions impaires.* Pour une substitution paire, on trouve, au contraire, la condition

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} -84\alpha_1^2+756\alpha_1\beta_1'-108\alpha_1\gamma_1 \\ \qquad +169\alpha_1\delta_1-1764\beta_1'^2+465\beta_1'\gamma_1-756\beta_1'\delta_1-36\gamma_1^2+108\gamma_1\delta_1-84\delta_1^2=1, \end{array}\right.$$

qui, en ordonnant autrement les termes et en remplaçant $3\beta_1'$ par β_1, devient

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} -84(\alpha_1^2+\delta_1^2)-196\beta_1^2-36\gamma_1^2 \\ \qquad +(252\beta_1-108\gamma_1)(\alpha_1-\delta_1)+169\alpha_1\delta_1+155\beta_1\gamma_1=1. \end{array}\right.$$

Le premier membre de cette dernière équation est précisément de la forme de la fonction $\Phi(x, y, z, u)$ avec la relation $D+2A=1$.

Désignons par S et $\overline{S}$ deux substitutions quelconques de G_{13}, les nombres A_1, B_1', Γ_1, Δ_1 relatifs au produit $S\overline{S}$ sont donnés par les formules suivantes :

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1=\alpha_1(-85\overline{\alpha_1}-108\overline{\gamma_1}+84\overline{\delta_1})+\beta_1'(756\overline{\alpha_1}-1764\overline{\beta_1'}+717\overline{\gamma_1}-756\overline{\delta_1}) \\ \qquad +\gamma_1(-252\overline{\beta_1'}-36\overline{\gamma_1})+\delta_1(84\overline{\alpha_1}+108\overline{\gamma_1}-84\overline{\delta_1}), \\ B_1'=\alpha_1(-85\overline{\beta_1'}-12\overline{\gamma_1})+\beta_1'(84\overline{\alpha_1}+108\overline{\gamma_1}-85\overline{\delta_1}) \\ \qquad +\gamma_1(12\overline{\alpha_1}-108\overline{\beta_1'}-12\overline{\delta_1})+\delta_1(84\overline{\beta_1'}+12\overline{\delta_1}), \\ \Gamma_1=\alpha_1(588\overline{\beta_1'}+84\overline{\gamma_1})+\beta_1'(-588\overline{\alpha_1}-756\overline{\gamma_1}+588\overline{\delta_1}) \\ \qquad +\gamma_1(-85\overline{\alpha_1}+756\overline{\beta_1'}+84\overline{\delta_1})+\delta_1(-588\overline{\beta_1'}-85\overline{\gamma_1}), \\ \Delta_1=\alpha_1(-84\overline{\alpha_1}+756\overline{\beta_1'}+84\overline{\delta_1})+\beta_1'(-1764\overline{\beta_1'}-252\overline{\gamma_1}) \\ \qquad +\gamma_1(-108\overline{\alpha_1}+717\overline{\beta_1'}-36\overline{\gamma_1}+108\overline{\delta_1})+\delta_1(84\overline{\alpha_1}-756\overline{\beta_1'}-85\overline{\delta_1}). \end{array}\right.$$

Si l'on fait la substitution

$$\beta_1'=\frac{\beta_1}{3}, \qquad \overline{\beta_1'}=\frac{\overline{\beta_1}}{3}, \qquad B_1'=\frac{B_1}{3},$$

ces équations prennent la forme (3).

La recherche de solutions de l'équation (15) en nombres entiers paraît d'abord assez difficile. On en forme aisément par la méthode suivante. Donnons-nous l'invariant I de la substitution, qui est égal à $\alpha_1+\delta_1$. Posons

$$\rho=-\beta_1', \qquad \sigma=\gamma_1+7\beta_1'.$$

En résolvant l'équation (15) par rapport à α_1, après y avoir remplacé δ_1 par $I - \alpha_1$, on trouve

$$(18) \quad \alpha_1 = \frac{-3024\rho - 216\sigma + 337 I \pm \sqrt{156(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2) + 337(I^2 - 4)}}{674}.$$

Dans le cas où I est pair, on peut simplifier un peu cette formule. En posant $I = 2I'$, il vient

$$(19) \quad \alpha_1 = \frac{-1512\rho - 108\sigma + 337 I' \pm \sqrt{39(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2) + 337(I'^2 - 1)}}{337}.$$

La forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$, qui paraît jouer un rôle fondamental dans la théorie du groupe, a pour déterminant 337. Cette circonstance suffit à indiquer la nature très complexe du groupe G_{13}.

Pour que les formules (18) et (19) fournissent pour α_1 des valeurs acceptables, il faut que les valeurs numériques des quantités placées sous les radicaux soient carrés parfaits. Par suite, le groupe n'admet aucune substitution dont l'invariant soit divisible par 3. En effet, si I était congru à zéro, mod 3, la quantité placée sous le radical dans la formule (18) serait congrue à -1, mod 3, et non reste quadratique de 3. Distinguons maintenant deux cas :

I est impair; $337(I^2 - 4)$ doit être reste quadratique par rapport au module 156.

I' doit être congru à 0, ± 1, ± 9, ± 11, mod 26, sous réserve de n'être pas divisible par 3.

I' est pair. $337(I'^2 - 1)$ doit être reste quadratique mod 39. I' doit être congru à 0, ± 1, ± 2, ± 6, mod 13, sous la même réserve.

La valeur de I ou de I' une fois choisie, on aura à résoudre en nombres entiers l'une des deux équations

$$156u + 337(I^2 - 4) = v^2, \qquad 39u + 337(I'^2 - 1) = v^2,$$

par rapport à u et à v. Il faudra ensuite chercher à représenter le nombre u par la forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$.

Quand dans les équations (18) ou (19) on a trouvé des valeurs de ρ, σ, I ou I' qui rendent les quantités placées sous les radicaux des carrés parfaits, ces mêmes valeurs rendent *toujours entière* l'une des deux valeurs de α_1, et, par conséquent, fournissent une substitution du groupe de G_{13}. En effet,

le produit des deux valeurs de α_1 est $\frac{84I^2+1}{337}$; donc l'un des deu
teurs dans (18) doit être divisible par 337, qui est premier; qu
ou impair, les deux numérateurs sont toujours pairs. Donc u
valeurs fournies par la formule (18) est non seulement rati
entière.

Ce procédé, en décomposant la difficulté, rend le problèm
permet de rechercher méthodiquement les plus simples su
groupe. Remarquons que, une substitution une fois obtenu
duire immédiatement cinq autres en la transformant par l
la substitution $\sum$. Voici les résultats ([1]). Les quatre nomb
chaque parenthèse indiquent les valeurs des coefficients α_1.

$I = 1$ (période 3).

$(-4, -1, 7, 5) = \sum^2$,

(— 82, — 19, 127, 83), (— 88, — 19, 145, 89), (— 118,
(— 142, — 31, 223, 143), (— 136, — 31, 205, 137), (— 106,

$I = 2$ (paraboliques).

(— 83, — 19, 132, 85), (— 98, — 21, 163, 100), (— 131,
(— 149, — 33, 232, 151), (— 134, — 31, 201, 136), (10
(— 89, — 21, 136, 91), (— 86, — 19, 141, 88), (— 113,
(— 143, — 31, 228, 145), (— 146, — 33, 223, 148) (— 11

$I = 4$ (hyperboliques).

(— 115, — 26, 187, 119), (— 145, — 31, 242, 149), (—
(— 205, — 46, 317, 209), (— 175, — 41, 262, 179), (—

$I = 11$ (hyperboliques).

(— 35, — 9, 65, 46), (— 47, — 11, 87, 58), (— 65,
(— 71, — 17, 117, 82), (— 59, — 15, 95, 70), (— 41,

$I = 13$ (hyperboliques).

(— 397, — 89, 649, 410), (— 511, — 109, 851,

([1]) Les substitutions placées sur la même ligne horizontale sont
écrites, les transformées de la première de cette ligne par les p

$I = 14$ (hyperboliques).

$(-35, -10, 62, 49)$, $(-29, -8, 58, 43)$, $(-41, -10, 80, 55)$,
$(-59, -14, 106, 73)$, $(-65, -16, 110, 79)$, $(-53, -14, 88, 67)$.

$I = 17$ (hyperboliques).

$(-65, -17, 113, 82)$, $(-71, -17, 131, 88)$, $(-101, -23, 179, 118)$,
$(-125, -29, 209, 142)$, $(-119, -29, 191, 136)$, $(-89, -23, 143, 106)$,
$(-152, -37, 247, 169)$, $(-164, -37, 283, 181)$, $(-224, -49, 379, 241)$,
$(-272, -61, 439, 289)$, $(-260, -61, 403, 277)$, $(-200, -49, 307, 217)$.

$I = 22$ (hyperboliques).

$(-103, -26, 178, 125)$, $(-121, -28, 218, 143)$, $(-169, -38, 292, 191)$,
$(-199, -46, 326, 221)$, $(-181, -44, 286, 203)$, $(-133, -34, 212, 155)$,
$(-109, -26, 196, 131)$, $(-151, -34, 266, 173)$, $(-193, -44, 322, 215)$,
$(-193, -46, 308, 215)$, $(-151, -38, 238, 173)$, $(-109, -28, 182, 131)$,
$(-124, -31, 209, 146)$, $(-139, -32, 247, 161)$, $(-193, -43, 332, 215)$,
$(-232, -53, 379, 254)$, $(-217, -52, 341, 239)$, $(-154, -41, 256, 176)$,
$(-133, -31, 236, 155)$, $(-184, -41, 319, 206)$, $(-229, -52, 377, 251)$,
$(-223, -53, 352, 245)$, $(-172, -43, 269, 194)$, $(-125, -32, 211, 149)$.

$I = 25$ (hyperboliques).

$(-10, -5, 33, 35)$, $(2, -3, 11, 23)$, $(20, 1, -15, 5)$,
$(26, 3, -19, -1)$, $(14, 1, 3, 11)$, $(-4, -3, 29, 29)$,
$(-89, -17, 123, 114)$, $(-112, -29, 183, 137)$, ...

$I = 26$ (hyperboliques).

$(-101, -26, 170, 127)$, ...

On trouve les relations

$$\begin{aligned}(5, 1, 7, -4) &= (-35, -10, 62, 49)(-35, -9, 65, 46)\\ &= (-35, -9, 65, 46)(-41, -10, 80, 55),\\ (-35, -9, 65, 46)(-88, -19, 145, 89) &= (-29, -8, 58, 43).\end{aligned}$$

Le groupe G_{12} est contenu dans six autres groupes. En effet, considérons les solutions en nombres entiers de l'équation (16), pour lesquelles β_1 n'est pas divisible par 3. β'_1 est alors fractionnaire. Rien n'empêche cependant de construire avec ces nombres une substitution S_j [1]. On trouve que $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ sont fractionnaires.

[1] D'après les formules de la page 9 du Mémoire déjà cité.

Les formules de composition (17) montrent d'ailleurs aisément que les coefficients A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 obtenus en composant deux de ces systèmes sont entiers. Donc l'ensemble des solutions en nombres entiers de l'équation (16) définit un groupe de substitutions S_j que nous appellerons G'_{13} et qui contient G_{13}. En transformant ce groupe par la substitution $\sum$ et par ses puissances, on obtient cinq autres groupes distincts entre eux et du premier G''_{13}, G'''_{13}, …, $G^{(6)}_{13}$.

On peut former les substitutions de G'_{13} par un procédé analogue à celui qui a servi à former les substitutions de G_{13}. Posons dans la relation (16)

$$\beta_1 = -10\rho - \sigma, \qquad \gamma_1 = 21\rho + 2\sigma, \qquad \delta_1 = I - \alpha_1,$$

et résolvons par rapport à α_1, il vient

$$(20) \qquad \alpha_1 = \frac{337I - 9576\rho - 936\sigma \pm \sqrt{337(I^2-4) + 52(14\rho^2 - 15\rho\sigma - 2\sigma^2)}}{674}.$$

Lorsque I est pair, posons encore $I = 2I'$; la formule devient alors

$$(21) \qquad \alpha_1 = \frac{337I' - 4788\rho - 468\sigma \pm \sqrt{337(I'^2-1) + 13(14\rho^2 - 15\rho\sigma - 2\sigma^2)}}{337}.$$

Tout revient à obtenir des valeurs de I, I′, ρ, σ rendant les radicaux (20) ou (21) rationnels. On trouve que les seules valeurs de I qui puissent convenir à des substitutions du groupe sont celles congrues à 0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, mod 13.

On pourrait obtenir, pour le calcul des substitutions du groupe, des formules plus curieuses, mais moins commodes que les formules (20) et (21). Posons, dans la relation (16),

$$\beta_1 = 271\rho - 336\sigma,$$
$$\gamma_1 = -567\rho + 703\sigma,$$

on aura

$$\alpha_1 = \frac{337I + 259056\rho - 291816\sigma \pm \sqrt{337(I^2-4) - 52(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2)}}{337},$$

où figure la forme qui entrait déjà dans l'équation (18), mais avec un signe contraire. D'ailleurs cette forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$ et son égale et de signe contraire $-7\rho^2 - \rho\sigma + 12\sigma^2$ sont de la même classe, comme on le reconnaît

en développant leurs racines en fractions continues. On pourrait donc obtenir une formule analogue à la formule (18) et où la forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$ serait affectée du signe $+$, mais les coefficients de cette formule sont extrêmement compliqués.

Voici les valeurs de α_1, β'_1, γ_1, δ_1 pour quelques substitutions du groupe G'_{13} :

$$\left(-10, -\tfrac{7}{3}, 15, 10\right), \quad \left(-15, -\tfrac{10}{3}, 23, 15\right), \quad \left(-11, -\tfrac{7}{3}, 18, 11\right),$$
$$\left(-35, -\tfrac{25}{3}, 53, 36\right), \quad \left(39, -\tfrac{28}{3}, 59, 41\right),$$
$$\left(-44, -\tfrac{31}{3}, 67, 46\right), \quad \left(-79, -\tfrac{56}{3}, 118, 81\right),$$
$$\left(-5, -\tfrac{5}{3}, 10, 9\right), \quad \left(-76, -\tfrac{55}{3}, 115, 80\right).$$

Citons encore un exemple de la forme $\Phi(x, y, z, u)$. Il s'obtient en adoptant pour j une racine $15^{\text{ième}}$ primitive de l'unité et en considérant le groupe G_{15} des substitutions S :

$$S, \left(z, \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}\right),$$

où les coefficients sont des nombres complexes de la forme

$$a_j = \sum \alpha_h j^h \qquad (h = 1, 2, 4, 8),$$

et où le changement de j en j^2 dans S réalise la transformation de S par la substitution de période 4 $\left(z, \frac{-2}{z+2}\right)$. On trouve que les β_h doivent être pairs. Soit $\beta_h = 2\beta'_h$.

Le déterminant d'une substitution paire est

$$-7\alpha_1^2 + 14\alpha_1\beta'_1 - 14\alpha_1\gamma_1 + 15\alpha_1\delta_1 - 14\beta_1'^2 - 2\beta'_1\gamma_1 - 14\beta'_1\delta_1 - 14\gamma_1^2 + 14\gamma_1\delta_1 - 7\delta_1^2.$$

En remplaçant β'_1 par $\frac{\beta_1}{2}$, on trouve précisément une forme Φ.

Le déterminant d'une substitution impaire est

$$-5\alpha_1^2 + 10\alpha_1\beta'_1 - 10\alpha_1\gamma_1 - 15\alpha_1\delta_1 - 10\beta_1'^2 - 10\beta'_1\gamma_1 - 10\beta'_1\delta_1 - 10\gamma_1^2 + 10\gamma_1\delta_1 - 5\delta_1^2;$$

il n'existe donc, comme dans le cas du nombre 13, pas de substitution impaire à déterminant 1 ([1]).

([1]) Comparer le travail de M. Fricke : *Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Grüppen reeller linearer Substitutionen* (*Mathematische Annalen*, 1891), où l'isomor-

IV.

Nous allons maintenant rechercher si, à chaque système x, y, z, u, on peut faire correspondre une substitution d'un groupe fuchsien, $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, par les formules

$$
(\mathrm{A})\qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \eta_{11}x+\eta_{12}y+\eta_{13}z+\eta_{14}u,\\
\beta &= \eta_{21}x+\eta_{22}y+\eta_{23}z+\eta_{24}u,\\
\gamma &= \eta_{31}x+\eta_{32}y+\eta_{33}z+\eta_{34}u,\\
\delta &= \eta_{41}x+\eta_{42}y+\eta_{43}z+\eta_{44}u,
\end{aligned}\right.
$$

où les η sont seize nombres fixes; de telle sorte qu'au système x_1, y_1, z_1, u_1, composé de x, y, z, u et de X, Y, Z, U, corresponde la substitution

$$
\frac{\alpha_1 z+\beta_1}{\gamma_1 z+\delta_1}=\frac{\mathrm{A}\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+\mathrm{B}}{\Gamma\dfrac{\alpha z+\delta}{\gamma z+\delta}+\Delta},
$$

nous aurons ainsi les équations

$$
\begin{aligned}
&\eta_{11}x_1+\eta_{12}y_1+\eta_{13}z_1+\eta_{14}u_1\\
&\quad=\quad(\eta_{11}\mathrm{X}+\eta_{12}\mathrm{Y}+\eta_{13}\mathrm{Z}+\eta_{14}\mathrm{U})(\eta_{11}x+\eta_{12}y+\eta_{13}z+\eta_{14}u)\\
&\qquad+(\eta_{21}\mathrm{X}+\eta_{22}\mathrm{Y}+\eta_{23}\mathrm{Z}+\eta_{24}\mathrm{U})(\eta_{31}x+\eta_{32}y+\eta_{33}z+\eta_{34}u),\qquad\ldots,
\end{aligned}
$$

qui, si l'on y remplace x_1, y_1, z_1, u_1 par leurs valeurs (A) doivent se réduire à des identités. On obtient ainsi soixante-quatre relations entre les η. Elles se partagent en quatre groupes. J'écris seulement les équations du premier groupe :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\eta_{11}^2\phantom{\eta_{11}}+\eta_{21}\eta_{31}&=-(\mathrm{A}+\mathrm{D})\eta_{11}+\mathrm{A}\eta_{14},\\
\eta_{11}\eta_{12}+\eta_{21}\eta_{32}&=-(\mathrm{A}+\mathrm{D})\eta_{12}-\mathrm{A}'\eta_{13}+\mathrm{B}\eta_{14},\\
\eta_{11}\eta_{13}+\eta_{21}\eta_{33}&=\mathrm{C}\eta_{11}+\mathrm{A}''\eta_{12}-\mathrm{A}\eta_{13},\\
\eta_{11}\eta_{14}+\eta_{21}\eta_{34}&=-\mathrm{A}\eta_{11}-\mathrm{A}\eta_{14},
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\eta_{11}\eta_{12}+\eta_{22}\eta_{31}&=\mathrm{B}\eta_{11}-\mathrm{A}\eta_{12}+\mathrm{A}'\eta_{13},\\
\eta_{12}^2\phantom{\eta_{11}}+\eta_{22}\eta_{32}&=\mathrm{A}'\eta_{11}+\mathrm{A}'\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{13}+\eta_{22}\eta_{33}&=(\mathrm{E}-\mathrm{A})\eta_{11}-\mathrm{C}\eta_{12}-\mathrm{B}\eta_{13}+\mathrm{A}\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{14}+\eta_{22}\eta_{34}&=-\mathrm{B}\eta_{11}-(\mathrm{A}+\mathrm{D})\eta_{12}-\mathrm{A}'\eta_{13};
\end{aligned}\right.
$$

---

phisme de certains groupes avec eux-mêmes est réalisé par une substitution de période 4. Ce travail porte la date du 7 janvier 1891 et, par conséquent, est un peu antérieur au travail de l'auteur *Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes* (*Annales de Toulouse*).

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta_{11}\eta_{13}+\eta_{23}\eta_{31}=-A''\eta_{12}-(A+D)\eta_{13}+C\eta_{14},\\
&\eta_{12}\eta_{13}+\eta_{23}\eta_{32}=A\eta_{11}+C\eta_{12}+B\eta_{13}+(E-A)\eta_{14},\\
&\eta_{13}^2\quad+\eta_{23}\eta_{33}=A''\eta_{11}+A''\eta_{14},\\
&\eta_{13}\eta_{14}+\eta_{23}\eta_{34}=A'\eta_{12}-A\eta_{13}-C\eta_{14},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta_{11}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{31}=-A\eta_{11}-A\eta_{14},\\
&\eta_{12}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{32}=-A\eta_{12}+A'\eta_{13}-B\eta_{14},\\
&\eta_{13}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{33}=-C\eta_{11}-A''\eta_{12}-(A+D)\eta_{13},\\
&\eta_{14}^2\quad+\eta_{24}\eta_{34}=A\eta_{11}-(A+D)\eta_{14}.
\end{aligned}\right.$$

En éliminant η_{31}, η_{32}, η_{33}, η_{34} entre les quatre premières et les quatre dernières équations, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_{21}}{\eta_{24}}&=\frac{\eta_{11}^2+(A+D)\eta_{11}-A\eta_{14}}{\eta_{11}\eta_{14}+A\eta_{11}+A\eta_{14}}=\frac{\eta_{11}\eta_{12}+(A+D)\eta_{12}+A'\eta_{13}-A\eta_{14}}{\eta_{12}\eta_{14}+A\eta_{12}-A'\eta_{13}+B\eta_{14}}\\
&=\frac{\eta_{11}\eta_{13}-C\eta_{11}-A''\eta_{12}+A\eta_{13}}{\eta_{13}\eta_{14}+C\eta_{11}+A''\eta_{12}+(A+D)\eta_{13}}=\frac{\eta_{11}\eta_{14}+A\eta_{11}+A\eta_{14}}{\eta_{14}^2-A\eta_{11}+(A+D)\eta_{14}},
\end{aligned}$$

et, en ajoutant termes à termes les deux rapports extrêmes,

$$=\frac{\eta_{11}(\eta_{11}+\eta_{14}+D+2A)}{\eta_{14}(\eta_{11}+\eta_{14}+D+2A)},$$

l'hypothèse $\frac{\eta_{11}}{\eta_{14}}=\frac{\eta_{21}}{\eta_{24}}$ est inadmissible, car elle conduirait à poser tous les η proportionnels : donc

$$\eta_{11}+\eta_{14}=-D-2A \qquad \text{et} \qquad \eta_{21}+\eta_{24}=0;$$

ces équations deviennent alors des identités. On trouve facilement

$$\eta_{31}+\eta_{34}=0, \qquad \eta_{41}+\eta_{44}=-D-2A.$$

En éliminant η_{31}, η_{32}, η_{33}, η_{34} entre les quatre premières équations et les quatre suivantes, il vient

$$\frac{\eta_{21}}{\eta_{22}}=\frac{\eta_{11}^2+(A+D)\eta_{11}-A\eta_{14}}{\eta_{11}\eta_{12}-B\eta_{11}+A\eta_{12}-A'\eta_{13}}=\frac{\eta_{11}\eta_{12}+(A+D)\eta_{12}+A'\eta_{13}-A\eta_{14}}{\eta_{12}^2-A'\eta_{11}-A'\eta_{14}}=\ldots.$$

L'égalité du second et du troisième rapport fournit une relation entre η_{11}, η_{12}, η_{13}, η_{14}; rendons cette relation homogène à l'aide de l'égalité

$$\frac{\eta_{11}+\eta_{14}}{-D-2A}=1,$$

homogènes par rapport aux a_{hjj}, il faut, ou bien que l'on ait

$$a_{hjj} = 0 \qquad (h \neq j),$$

ou bien que tous les déterminants de la matrice

$$(\mathrm{M}) \qquad | a_{ijh} - a_{ihj} |,$$

où j est fixe, où i prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et h les mêmes valeurs, moins la valeur j, soient nuls. Cette dernière hypothèse paraît la plus importante, car elle se présente dans les formules (3).

On obtient encore aisément les relations

$$(32) \qquad \sum_{h=1}^{4} [a_{hjk}(a_{ilh} - a_{ihl}) + a_{hlj}(a_{ikh} - a_{ihk}) + a_{hkl}(a_{ijh} - a_{ihj})] = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

chacune de ces équations ne contient que neuf termes, parce que les multiplicateurs de a_{hjk}, a_{hlj}, a_{hkl} sont nuls respectivement pour $h = l, k, j$.

Cherchons la condition pour qu'il existe un système unité (ξ), c'est-à-dire pour que les nombres du système ($x\xi$) soient proportionnels à ceux du système (x), quel que soit (x). On devra avoir

$$(33) \qquad \sum_{h=1}^{4} a_{ijh}\xi_h = 0 \qquad (j \neq i),$$

et

$$(34) \qquad \sum_{h=1}^{4} a_{iih}\xi_h = \mathrm{S},$$

S désignant un certain nombre, le même pour les quatre valeurs $i = 1, 2, 3, 4$. Les conditions d'existence des nombres ξ_h et S s'expriment par la nullité d'un certain nombre de déterminants qui s'écrivent sans difficulté.

Quelles sont les conditions pour qu'à chaque système correspondent les substitutions d'un groupe de substitutions linéaires, de telle sorte qu'au système formé en composant (x) avec (X') corresponde la substitution obtenue en multipliant la substitution correspondant au premier système par la substitution correspondant au second. C'est une généralisation du problème du § IV ? En définissant les nombres η comme dans ce paragraphe,

et, en portant dans (22) les valeurs de X'_h fournies par les équations (25)

$$(26)\qquad X_i = \sum_{j,k,l=1}^{4,4,4} x_j x'_k X''_l \sum_{h=1}^{4} a_{ijh} a_{hkl}.$$

Soit (x'') le produit symbolique $(x)(x')$; on a

$$(27)\qquad x''_m = \sum_{j=1}^{4} x_j \sum_{k=1}^{4} a_{mjk} x'_k.$$

D'ailleurs on doit avoir

$$(X) = (x'')(X''),$$

et, par suite,

$$(28)\qquad X_i = \sum_{m=1}^{4} x''_m \sum_{l=1}^{4} a_{iml} X''_l,$$

et, en éliminant les x''_m entre les équations (27) et (28), on obtient

$$(29)\qquad X_i = \sum_{j,k,l=1}^{4,4,4} x_j x'_k X''_l \sum_{m=1}^{4} a_{mjk} a_{iml}.$$

On doit donc avoir, pour tous les systèmes de valeurs de j, h, k, l,

$$(30)\qquad \sum_{h=1}^{4} a_{ijh} a_{hkl} = \sum_{m=1}^{4} a_{mjk} a_{iml}.$$

Ces équations sont au nombre de deux cent cinquante-six, mais elles ne sont évidemment pas toutes distinctes, car, d'après ce qui précède, nous en possédons des solutions contenant des constantes arbitraires. Sans les discuter complètement, on peut en déduire quelques conséquences intéressantes. Si dans l'équation (30) on donne à j, k, l la même valeur, il vient

$$(31)\qquad \sum_{h=1}^{4} a_{hjj}(a_{ijh} - a_{ihj}) = 0.$$

Dans (31) donnons à i les valeurs 1, 2, 3, 4. Nous obtenons quatre équations dans lesquelles les coefficients de a_{jjj} sont nuls, ces équations étant

systèmes inverses l'un de l'autre, en exprimant que le produit des deux substitutions correspondantes est égal à 1, on obtient une relation du second degré entre les η, qui n'est évidemment pas identique [1].

NOTE RELATIVE A CERTAINES SUBSTITUTIONS COMPLEXES.

Dans un travail antérieur, j'ai mentionné, mais sans donner de méthode générale pour les former, des substitutions complexes $\sum_j$ formées avec une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, telles que

$$\sum_j \sum_{j^\rho} \cdots \sum_{j^{\rho^{\frac{p-1}{2}}}} = 1. \tag{1}$$

On peut employer les procédés suivants, que je me bornerai à expliquer sur des exemples. Soit $p = 7$. Les racines primitives troisièmes de l'unité vérifient l'équation

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0; \tag{2}$$

considérons la substitution de z à z' définie par la relation

$$\frac{z' + j^2 + j^5 + 2\omega(j^4 + j^3)}{z' + j^2 + j^5 + 2\omega^2(j^4 + j^3)} = \omega \frac{z + j + j^6 + 2\omega(j^2 + j^5)}{z + j + j^6 + 2\omega^2(j^2 + j^5)}; \tag{3}$$

dans chacune des deux fractions, le dénominateur ne diffère du numérateur que par le changement de ω en ω^2. La forme (3) montre évidemment que cette substitution jouit de la propriété (1); mais elle ne contient pas ω. En effet, par un calcul facile, on trouve

$$z' = \frac{z(-j^2 - j^5 + 2j^4 + 3j^3) - 5(j + j^6) - 2(j^2 + j^5) + j^4 + j^3}{z + j + j^6}:$$

c'est une substitution complexe qui jouit de la propriété demandée.

Considérons une substitution de la forme

$$z' = \frac{[m_1(j + j^6) + m_2(j^2 + j^5) + m_3(j^3 + j^4)]z + n_1(j + j^6) + n_2(j^2 + j^5) + n_3(j^3 + j^4)}{[p_1(j + j^6) + p_2(j^2 + j^5) + p_3(j^3 + j^4)]z + q_1(j + j^6) + q_2(j^2 + j^5) + q_3(j^3 + j^4)}.$$

---

[1] *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Picard.

En posant

$$z = \frac{x}{y}, \qquad z' = \frac{x'}{y'},$$

nous pourrons remplacer la substitution précédente par une substitution à deux variables

$$(4)\quad \begin{cases} x' = [m_1(j+j^6) + m_2(j^2+j^5) + m_3(j^3+j^4)]x \\ \qquad + [n_1(j+j^6) + n_2(j^2+j^5) + n_3(j^3+j^4)]y, \\ y' = [p_1(j+j^6) + p_2(j^2+j^5) + p_3(j^3+j^4)]x \\ \qquad + [q_1(j+j^6) + q_2(j^2+j^5) + q_3(j^3+j^4)]y. \end{cases}$$

Soient

$$\begin{array}{lll} x(j+j^6) = x_1, & x(j^2+j^5) = x_2, & x(j^3+j^4) = x_3, \\ y(j+j^6) = y_1, & y(j^2+j^5) = y_2, & y(j^3+j^4) = y_3, \\ x'(j^3+j^4) = x'_1, & x'(j+j^6) = x'_2, & x'(j^2+j^5) = x'_3, \\ y'(j^3+j^4) = y'_1, & y'(j+j^6) = y'_2, & y'(j^2+j^5) = y'_3. \end{array}$$

La substitution complexe (4) est remplacée par la substitution à six variables

$$(5)\quad \begin{cases} x'_1 = (m_2 - m_3)x_1 + (m_1 + m_2 - 2m_3)x_2 \\ \qquad + (n_2 - 2m_3)x_3 + (n_2 - n_3)y_1 + (n_1 + n_2 - 2n_3)y_2 + (n_1 - 2n_3)y_3. \\ x'_2 = (m_2 - 2m_1)x_1 + (m_3 - m_1)x_2 \\ \qquad + (m_2 + m_3 - 2m_1)x_3 + (n_2 - 2n_1)y_1 + (n_3 - n_1)y_2 + (n_2 + n_3 - 2n_1)y_3, \\ x'_3 = (m_1 + m_3 - 2m_2)x_1 + (m_3 - 2m_2)x_2 \\ \qquad + (m_1 - m_2)x_3 + (n_1 + n_3 - 2n_2)y_1 + (n_3 - 2n_2)y_2 + (n_1 - n_2)y_3, \\ y'_1 = (p_2 - p_3)x_1 + (p_1 + p_2 - 2p_3)x_2 \\ \qquad + (p_1 - 2p_3)x_3 + (q_2 - q_3)y_1 + (q_1 + q_2 - 2q_3)y_2 + (q_1 - 2q_3)y_3. \\ y'_2 = (p_2 - 2p_1)x_1 + (p_3 - p_1)x_2 \\ \qquad + (p_2 + p_3 - 2p_1)x_3 + (q_2 - 2q_1)y_1 + (q_3 - q_1)y_2 + (q_2 + q_3 - 2q_1)y_3, \\ y'_3 = (p_1 + p_3 - 2p_2)x_1 + (p_3 - 2p_2)x_2 \\ \qquad + (p_1 - p_2)x_3 + (q_1 + q_3 - 2q_2)y_1 + (q_3 - 2q_2)y_2 + (q_1 - q_2)y_3. \end{cases}$$

Il suffit d'exprimer que celle-ci est de période 6, ce qui aura lieu d'après une théorie connue.

SUR LE

PROBLÈME DE DIRICHLET

ET SON EXTENSION

AU CAS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE,

PAR M. A. PARAF,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

La théorie des équations aux dérivées partielles est une de celles qui ont le plus attiré dans ce siècle l'attention des géomètres. En se bornant même à un point particulier de cette théorie, à la considération des équations linéaires du second ordre, il faut renoncer à citer tous les Mémoires écrits sur la matière, tous les résultats déjà obtenus sur ce point. La théorie générale des fonctions, la Géométrie des surfaces et des ensembles de lignes, la Physique mathématique donnent naissance à de telles équations, et la manière de poser les problèmes varie avec le point de vue auquel on se place.

Pour l'équation linéaire générale à deux variables indépendantes

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2D\frac{\partial u}{\partial x}+2E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0,$$

le problème se présente sous deux formes bien différentes, suivant que les caractéristiques de l'équation sont réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que la quantité $B^2 - AC$ est positive ou négative. Dans ce dernier cas, on peut se proposer de trouver une intégrale continue dans une aire donnée, y admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et prenant sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance. C'est ce problème qui fait l'objet du présent travail.

Le premier Chapitre traite de la plus simple et aussi de la plus célèbre

de toutes ces équations : je veux dire l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème correspondant est connu sous le nom de ***problème de Dirichlet*** et joue un rôle capital dans plusieurs branches des Mathématiques. La première solution rigoureuse en a été trouvée par M. Schwarz (1), et M. C. Neumann (2) en a, de son côté, donné une solution différente.

Plus récemment, M. Poincaré (3) a fait connaître une méthode nouvelle et extrêmement originale pour résoudre ce problème. L'auteur a exposé sa méthode pour le cas de trois variables, en déterminant l'équilibre électrique à la surface d'un conducteur isolé quelconque. L'application du principe des images donne alors immédiatement la fonction de Green relative à la surface inverse, et il reste, pour achever la solution, à discuter une intégrale double (4).

Outre cette voie un peu détournée, M. Poincaré montre encore, mais plus sommairement, que la même méthode se prête à la solution directe sans passer par l'intermédiaire de la fonction de Green. Il m'a semblé qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à reprendre sous cette dernière forme la belle méthode de M. Poincaré, en l'exposant dans le cas de deux variables qui, plus simple à certains égards que le cas de trois variables, présente en revanche quelques difficultés particulières tenant aux différences existant entre le potentiel newtonien et le potentiel logarithmique. Certains points étaient aussi susceptibles d'un plus grand degré de rigueur que ne leur en avait donné l'auteur dans les quelques pages concises consacrées par lui à ce sujet. J'ai ainsi été amené à apporter à la méthode de M. Poincaré des changements assez notables qui n'atteignent cependant pas le fond même des idées.

L'équation de Laplace conduit tout naturellement à l'équation

$$\Delta(u) = f(x, y).$$

---

(1) SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II.

(2) C. NEUMANN, *Untersuchungen in dem Gebiete des logarithmischen und newtonschen Potentiales*, Leipzig, 1877.

(3) POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*, t. XII.

(4) *Voir*, sur ce point, A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, Leipzig, 1887.

Green (¹) a intégré cette équation, mais la méthode qu'il a suivie laisse à désirer et n'est plus en rapport avec les habitudes d'esprit que l'on apporte aujourd'hui dans ces recherches. Cette question fait l'objet du second Chapitre.

Dans la troisième et dernière Partie, nous arrivons enfin à l'équation générale. Jusqu'à ces derniers temps, on s'était généralement borné à considérer le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques, et l'on n'avait cherché l'intégrale que sous forme de fonction analytique, sans se préoccuper des autres intégrales qui pourraient exister. M. Schwarz (²), dans une première tentative, avait ouvert une voie nouvelle dans un cas très particulier. C'est M. Picard qui a fait faire à la question un pas décisif en montrant que la méthode des approximations successives se prête merveilleusement à ce genre de problèmes.

Dans plusieurs Mémoires bien connus (³), M. Picard développe cette méthode et obtient des résultats de la plus haute importance concernant les équations du second ordre en général, ainsi que certaines équations particulières, entre autres les équations linéaires, notamment dans le cas des coefficients analytiques.

En me bornant aux équations linéaires, j'ai, en suivant une voie différente, retrouvé une partie de ses résultats et étendu au cas des coefficients quelconques quelques-uns des théorèmes démontrés par lui dans l'hypothèse des coefficients analytiques.

(¹) GREEN, *Math. Papers* et *Journal de Crelle*, t. 47.

(²) SCHWARZ, *Gesam. math. Abh.*, t. I, p. 241 et seq.

(³) *Voir* entre autres : *Acta mathematica*, t. XII. — *Journal de Mathématiques*, 1890. — *Journal de l'École Polytechnique*, LXᵉ Cahier.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE LAPLACE ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

1. L'équation

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

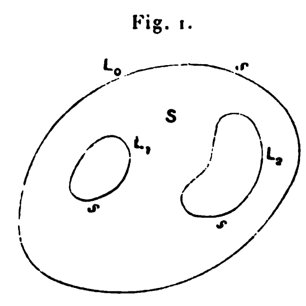
que nous appellerons *équation de Laplace*, et l'équation analogue, avec une variable indépendante de plus, interviennent dans presque toutes les branches de l'Analyse. Elles se présentent notamment dans la théorie de l'attraction, dans celle de l'équilibre électrique, dans celle de la chaleur, etc., etc. En Analyse pure, la théorie des fonctions d'une variable complexe est intimement liée à la solution du problème de Dirichlet que l'on peut énoncer comme il suit :

Trouver une fonction des deux variables x et y qui, à l'intérieur d'une aire donnée, soit finie, continue et bien déterminée, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, satisfasse à l'équation de Laplace et prenne sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance.

C'est par ce problème que nous commencerons notre étude.

Les aires dont nous parlerons seront toujours supposées connexes, mais à connexion simple ou multiple. Si l'ordre de connexion est égal à n, l'aire sera la portion du plan limitée extérieurement par une courbe

Fig. 1.



fermée L_0 (*fig.* 1) et intérieurement par $n - 1$ courbes fermées $L_1, L_2, \ldots$, [int]érieures à L_0, mais extérieures les unes aux autres.

Nous désignerons toujours par S l'intérieur d'une telle aire, et nous emploierons la lettre s pour désigner, suivant les cas, ou bien l'ensemble du contour de S, ou bien l'une de ces courbes seulement, ou encore un point sur une de ces courbes, ainsi que la variable qui fixe la position de ce point sur le contour. Il ne pourra, d'ailleurs, jamais résulter aucune confusion de cet emploi multiple de la lettre s.

Nous supposerons d'abord que s a en chaque point une tangente bien déterminée et variant d'une manière continue. Nous verrons plus tard que l'on peut s'affranchir de cette dernière restriction, pourvu que les points où cette condition cesse d'être remplie soient en nombre limité.

Nous représenterons par U ou, d'une manière plus précise, par $U(s)$ la fonction du point s, donnée d'avance, qui exprime la suite des valeurs que doit prendre la fonction cherchée V sur le contour.

A l'égard de cette fonction U ([1]), nous supposons seulement qu'elle est continue sur chacune des courbes qui limitent S, mais sans faire aucune hypothèse sur la continuité ni même sur l'existence de sa dérivée.

Nous dirons, suivant l'usage, qu'une fonction est harmonique à l'intérieur d'une aire S quand elle y est continue et uniforme, admet des dérivées des deux premiers ordres continues et uniformes, et vérifie l'équation de Laplace. Le problème de Dirichlet revient donc à trouver une fonction V harmonique dans S et prenant sur s des valeurs données d'avance. Nous voulons dire, par ces derniers mots, que, quand le point A tend vers le point s par un chemin quelconque intérieur à S, la fonction $V(A)$ tend toujours vers $U(s)$.

2. A côté du problème précédent, que nous pouvons appeler le *problème intérieur*, vient se placer un problème analogue relatif à la partie du plan extérieure à S. Les considérations qui suivent nous permettront à la fois de formuler ce problème et d'en ramener la solution à celle du problème intérieur.

A cet effet, commençons par faire une remarque qui nous sera utile dans la suite.

Si deux aires S et S′ sont représentées l'une sur l'autre d'une manière

---

([1]) Nous ne nous occuperons pas du cas où U présenterait un nombre fini de discontinuités, ce cas pouvant se ramener simplement au cas où U est continue. *Voir* J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale*, 1888).

conforme par la transformation $x+iy=f(x'+iy')$, toute fonction $V(x,y)$ harmonique dans S se transforme en une fonction $V'(x',y')$ harmonique dans S'.

En effet, toute fonction harmonique $V(x,y)$ peut être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable complexe $\varphi(x+iy)$, de sorte que l'on a

$$V(x,y)+i\,U(x,y)=\varphi(x+iy).$$

Effectuons maintenant la transformation réelle

$$x=X(x',y'), \qquad y=Y(x',y')$$

avec

$$x+iy=f(x'+iy')=X(x',y')+i\,Y(x',y'),$$

il en résultera

$$V'(x',y')+i\,U'(x',y')=\varphi[f(x'+iy')]=\Phi(x'+iy'),$$

où l'on a posé

$$V'(x',y')=V(X,Y),$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cela posé, effectuons une transformation par rayons vecteurs réciproques, en choisissant le pôle à l'intérieur de S. Par cette transformation les n courbes s se changent en n autres courbes s' qui sont toutes extérieures les unes aux autres, et la région S se transforme dans la région S' du plan qui est extérieure à toutes les courbes s'. La relation entre les points des deux aires est, d'ailleurs, univoque et isogonale, et la remarque précédente est donc applicable au cas présent.

La fonction $V(x,y)$ harmonique dans S et se réduisant à $U(s)$ sur s devient donc une fonction $V(x',y')$ harmonique dans S' et se réduisant à $U'(s')$ sur s', la fonction U' étant bien connue en tout point de s', puisque la relation entre les points des deux aires reste univoque même sur les contours. Quant au point ∞ qui est l'homologue du pôle de la transformation, on voit de suite que la fonction V' reste régulière dans le voisinage de ce point et y prend une valeur finie bien déterminée et nullement arbitraire, puisque cette valeur est précisément celle que prend V au point choisi pour pôle, laquelle est, comme nous le verrons, parfaitement déterminée par la fonction $U(s)$ donnée.

Le problème extérieur peut donc se formuler ainsi :

Étant données n courbes fermées s extérieures les unes aux autres, et une suite de valeurs formant sur chacune de ces courbes une fonction continue U(s), *trouver une fonction* V *harmonique dans la région* S *du plan extérieure à la fois à toutes les courbes s, prenant sur s les valeurs* U(s), *et qui, pour x et y très grands, reste régulière en tendant vers une valeur finie inconnue, mais déterminée par la fonction* U(s).

Nous voyons en même temps que sa solution se ramène à celle du problème intérieur pour un contour convenable. Nous nous bornerons donc désormais à l'étude du problème intérieur.

3. Rappelons d'abord quelques résultats classiques qui sont d'un usage courant et dont la démonstration se trouve dans tous les Traités (¹).

Une fonction, harmonique dans une région S, ne peut avoir de maximum ni de minimum en aucun point de S.

Sa valeur en tout point intérieur est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'elle prend sur le contour.

Sa valeur en tout point intérieur est donc nulle si elle est nulle tout le long du contour.

Le problème de Dirichlet ne peut admettre plus d'une solution. Il a été complètement résolu dans le cas du cercle, et l'on démontre par des considérations élémentaires que la solution est donnée, dans ce cas, par la formule

$$V(P) = \int V(s)\,\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds. \tag{2}$$

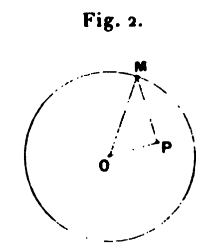
Dans cette formule, V(P) représente la valeur que prend la fonction cherchée V (*fig.* 2) en un point quelconque P intérieur au cercle dont le centre est en O et dont le rayon est R. M est un point quelconque de la circonférence que nous désignons aussi par s, valeur de l'arc qui fixe sa position sur la circonférence ; enfin l'intégrale est prise le long de la circon-

---

(¹) Consulter, par exemple, NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und newtonsche Potential*, Leipzig, 1877. — A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, Leipzig, 1887. — J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale*, Paris, 1888). — E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I. Paris, 1891.

férence dans le sens positif. Cette formule montre aussi que la fonction V(P) est régulière à l'intérieur du cercle.

Fig. 2.



Si, dans cette formule, nous supposons que P vienne en O, on a

$$V(O) = \int_0^{2\pi} \frac{V(s)\,d\theta}{2\pi}, \tag{2 bis}$$

et l'on retrouve ce résultat connu, que la moyenne arithmétique des valeurs de V sur la circonférence est égale à la valeur de V au centre.

Quelques considérations empruntées à la Mécanique faciliteront encore notre tâche.

On sait que, si, dans un plan, une masse matérielle égale à m est concentrée en un point A et attire un point M de masse 1 suivant la droite MA avec une force ayant pour intensité $\frac{m}{r}$ (où r désigne la longueur absolue MA), les composantes de cette attraction suivant les axes des x et des y (que nous supposons rectangulaires) sont égales aux dérivées partielles de la fonction $m \log \frac{1}{r}$ par rapport aux coordonnées x et y du point M.

Cette fonction $m \log \frac{1}{r}$ s'appelle le *potentiel logarithmique* de la masse m sur le point M.

Si l'on a plusieurs masses attirantes, le potentiel sera la somme

$$\sum m \log \frac{1}{r}$$

étendue à toutes les masses agissantes. Si les masses remplissent d'une manière continue une aire ou un arc de courbe avec une densité ρ (ce qui veut dire que la masse contenue dans l'élément $d\tau$ de l'aire ou de la courbe est

égale à $\rho\, d\tau$), il existera de même un potentiel donné par la formule

$$V = \int \rho \log \frac{1}{r}\, d\tau$$

étendue à toutes les masses agissantes.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des masses positives.

Les principales propriétés du potentiel logarithmique que nous aurons à employer sont les suivantes.

Dans toute région qui ne contient aucune des masses agissantes, le potentiel est une fonction harmonique.

Le potentiel dû à des masses dont la distribution est superficielle est une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans toute région finie du plan.

Les dérivées du second ordre sont aussi continues tant en dehors qu'en dedans des masses agissantes, mais elles éprouvent une discontinuité en traversant le contour des aires attirantes; à l'intérieur de ces aires, on a

$$\Delta V = -2\pi\rho. \tag{3}$$

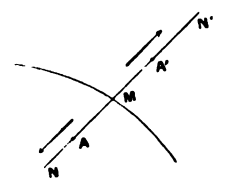
Le potentiel dû à des masses dont la distribution est linéaire est encore une fonction continue dans toute région finie, mais les dérivées du premier ordre éprouvent une discontinuité en traversant les courbes attirantes.

Cette discontinuité est exprimée par la formule

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -2\pi\rho, \tag{4}$$

dans laquelle $\frac{dV}{dn}$ est la limite vers laquelle tend la dérivée de V au point A (*fig.* 3) prise dans la direction de la flèche lorsque le point A se

Fig. 3.



rapproche de M en suivant la normale MN. $\frac{dV}{dn'}$ est la quantité analogue au point A'.

On remarquera que le potentiel logarithmique peut être aussi bien négatif que positif, et que, en un point qui s'éloigne indéfiniment, il peut être ou bien $-\infty$ ou bien 0. Ce sont ces deux faits qui donnent au cas de deux variables une physionomie particulière.

Enfin, si l'on considère le potentiel engendré par des masses distribuées d'une manière quelconque dans le plan, si l'on appelle d'une manière générale m celles de ces masses qui sont extérieures à un cercle de rayon R ou sur sa circonférence, et μ celles qui sont intérieures au cercle, la moyenne arithmétique des valeurs de ce potentiel en tous les points de la circonférence sera donnée par l'équation

$$(5) \qquad \text{moy.}\, V = \sum m \log\frac{1}{r} + \log\frac{1}{R}\sum\mu,$$

r désignant la distance d'un point de masse m au centre de la circonférence.

Nous possédons maintenant tous les matériaux nécessaires. Il s'agit de les mettre en œuvre.

4. Soit un cercle de centre O et de rayon R, A un point extérieur, P un point intérieur.

La quantité $\log\frac{1}{AP}$, dans laquelle nous considérons le point A comme fixe et le point P comme variable, est une fonction des coordonnées de P, harmonique dans tout le cercle, puisque P est toujours séparé de A par la circonférence. En un point M de la circonférence, elle prend la valeur $\log\frac{1}{AM}$. Nous pouvons donc, en appliquant la formule (2), écrire

$$(6) \qquad \log\frac{1}{AP} = \int \log\frac{1}{AM}\,\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds.$$

Faisons, d'autre part, $V(s) = 1$ dans la même formule (2).

L'intégrale du second membre devra représenter une fonction harmonique dans le cercle et se réduisant à l'unité sur la circonférence. Mais nous avons une telle fonction en prenant $V(P) = 1$, et comme le problème ne peut avoir plus d'une solution, on aura

$$(7) \qquad 1 = \int \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds.$$

Les formules (6) et (7) expriment le fait suivant :

Si l'on a, sur la circonférence, une couche attirante dont la densité en

chaque point M est la quantité positive $\rho = \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2}$, la masse totale de cette couche sera égale à l'unité [formule (7)] et le potentiel de cette couche sur un point extérieur A sera le même que si toute la masse était concentrée en P [formule (6)].

Que devient ce potentiel quand le point A est intérieur au cercle ? Il est toujours donné par la même intégrale, mais l'égalité (6) n'a plus lieu dans ce cas. Entourons alors P d'un petit cercle et envisageons l'aire comprise entre les deux cercles pour y étudier la fonction

$$\log \frac{1}{PA} - \int \log \frac{1}{AM} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds,$$

où, cette fois, P est fixe et A variable.

Les deux termes de la différence sont harmoniques dans l'aire, puisque chacun d'eux est un potentiel dû à des masses dont aucune n'est intérieure. Sur le cercle extérieur, la différence est nulle, comme on le voit en supposant que dans (6) le point extérieur A se rapproche de la circonférence, ce qui est légitime, à cause de la continuité du potentiel. Sur le cercle intérieur, elle est certainement positive, et comme elle ne peut avoir de minimum dans l'intérieur de l'aire, elle y sera constamment positive. On a donc, en tout point A intérieur,

$$(8) \qquad \int \log \frac{1}{MA} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds < \log \frac{1}{PA}.$$

Nous avons donc finalement démontré le théorème suivant :

Quand une masse égale à l'unité est placée en un point P *de l'intérieur d'un cercle, si l'on répartit cette masse sur toute la circonférence, de manière que la densité en un point quelconque* M *soit inversement proportionnelle au carré de* MP, *la couche circulaire ainsi obtenue aura même potentiel que la masse primitive en tout point extérieur, et un potentiel plus petit en tout point intérieur.*

Une telle couche s'appellera la *couche équivalente* à la masse placée en P.

Le théorème subsiste évidemment si la masse primitive, au lieu d'être égale à l'unité, était égale à m.

Enfin, si l'on avait plusieurs masses positives à l'intérieur du cercle, on

pourrait remplacer chacune d'elles par une couche équivalente, et nous arrivons ainsi à former une couche équivalente à un système quelconque de masses intérieures à un cercle, cette couche ayant même potentiel que le système donné sur tout point extérieur, et un potentiel plus petit sur tout point intérieur.

On peut remarquer qu'il est impossible de trouver sur un même cercle deux couches différentes, de densités ρ et ρ_1, équivalentes à un même système de masses intérieures.

Soient, en effet, V et V_1 les potentiels de ces deux couches sur un même point A. On aura, pour tout point extérieur, $V = V_1$, et cette égalité aura encore lieu sur la circonférence, à cause de la continuité du potentiel. Alors la différence $V - V_1$, harmonique dans l'intérieur du cercle et nulle sur la circonférence, est nulle dans tout l'intérieur. Les fonctions V et V_1 coïncident donc dans tout le plan, et l'on a, en tout point de la circonférence,

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_1}{dn},$$

c'est-à-dire $\rho = \rho_1$, d'après la formule (4).

C'est sur la proposition que nous venons de démontrer que repose la méthode de M. Poincaré.

5. Il nous faut encore établir deux théorèmes dus à M. Harnack, et qui jouent dans la théorie des fonctions harmoniques le même rôle que les théorèmes d'Abel sur les séries entières dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Revenons encore à la formule (2)

$$V(P) = \int V(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds$$

pour en déduire des limites entre lesquelles sont comprises les valeurs de $V(P)$ à l'intérieur du cercle, si l'on suppose que $V(s)$ est constamment positif sur la circonférence. Les deux facteurs de la quantité à intégrer sont alors positifs. MP étant toujours compris entre $R + OP$ et $R - OP$, nous aurons évidemment

$$(9) \qquad \frac{R - OP}{R + OP} \int \frac{V(s)\, ds}{2\pi R} < V(P) < \frac{R + OP}{R - OP} \int \frac{V(s)\, ds}{2\pi R}.$$

Cela posé, nous pouvons démontrer le premier de ces théorèmes, en l'énonçant comme il suit :

Soit une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont tous les termes sont des fonctions harmoniques positives en tous les points d'une région connexe R. *Si cette série est convergente en un point de la région, elle sera uniformément convergente dans toute la région* R *et y représentera une fonction harmonique.*

Supposons d'abord que la région R soit un cercle C de centre O et de rayon R. Construisons un cercle concentrique C' de rayon $R' < R$. Les fonctions u_i prendront sur C' des valeurs u'_i finies et positives, continues sur la circonférence. On aura donc, P et Q étant deux points intérieurs à C',

$$\frac{R' - OP}{R' + OP} \int_{C'} \frac{u'_i \, ds'}{2\pi R'} < u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \int_{C'} \frac{u'_i \, ds'}{2\pi R'},$$

$$\frac{R' - OQ}{R' + OQ} \int_{C'} \frac{u'_i \, ds'}{2\pi R'} < u_i(Q) < \frac{R' + OQ}{R' - OQ} \int_{C'} \frac{u'_i \, ds'}{2\pi R'}.$$

On en conclut, *a fortiori*,

$$u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q),$$

et si P ne sort pas d'un cercle de rayon R'' inférieur à R',

$$u_i(P) < \frac{R' + R''}{R' - R''} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q).$$

Les quantités $u_i(P)$ sont donc respectivement inférieures aux quantités $u_i(Q)$ multipliées par un même facteur constant et indépendant de P. Donc, dans tout l'intérieur du cercle R'', la série u_i est uniformément convergente et représente, par suite, une fonction continue des coordonnées de P. R'' peut d'ailleurs être pris aussi voisin de R que nous voudrons.

Ceci s'étend sans peine à une aire connexe quelconque S. Supposons, en effet, la série convergente en un point Q de l'aire, et soit P un autre point quelconque de l'aire. Nous pourrons toujours tracer une suite de cercles en nombre fini $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se coupant successivement, et le premier contenant Q dans son intérieur, le dernier contenant P. Soit alors Q_1 un point

6. Nous allons faire tout de suite une application de ce second théorème, en résolvant le problème de Dirichlet dans le cas de l'aire comprise entre deux cercles concentriques.

Soient C et C' les deux cercles, R et R' leurs rayons, r et θ les coordonnées polaires d'un point de la couronne. On aura

$$R' > r > R.$$

Nous nous proposons de trouver, si cela est possible, une fonction $f(r, \theta)$, harmonique dans la couronne S, se réduisant à des fonctions données $U(\theta)$ et $U'(\theta)$ lorsque r tend vers R ou vers R'. Comme nous savons d'avance que ce problème admet au plus une solution, si nous arrivons à former une fonction répondant aux conditions énoncées, nous aurons résolu le problème.

Pour atteindre ce but, nous allons construire une série dont tous les termes soient des fonctions harmoniques dans S, et nous déterminerons les coefficients de manière à satisfaire aux conditions aux limites. Remarquons, à cet effet, que les fonctions

$$r^m \cos m\theta, \qquad r^m \sin m\theta, \qquad \frac{1}{r^m}\cos m\theta, \qquad -\frac{1}{r^m}\sin m\theta,$$

sont harmoniques dans S, car ce sont les parties réelles et les coefficients de i dans les fonctions complexes

$$z^m \quad \text{et} \quad \frac{1}{z^m} \qquad [z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)],$$

lesquelles sont holomorphes dans S, si m est entier.

Désignons donc par

$$a_0, \quad b_0, \quad a_1, \quad a_{-1}, \quad b_1, \quad b_{-1}, \quad \ldots, \quad a_m, \quad a_{-m}, \quad b_m, \quad b_{-m}, \quad \ldots$$

des constantes indéterminées, et employons les abréviations suivantes

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta = X_m, \qquad a_{-m} \cos m\theta - b_{-m} \sin m\theta = Y_m, \\ \left(\frac{r}{R'}\right)^m X_m + \left(\frac{R}{r}\right)^m Y_m = u_m, \\ \left(\frac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = U_m, \qquad X_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m Y_m = U'_m; \end{array} \right.$$

u_m est alors une fonction harmonique dans S et tend vers U_m ou vers U'_m

quand le point mobile se rapproche d'un point de C ou de C'. Posons enfin

$$(11)\quad \begin{cases} f(r,\theta) = a_0 + b_0 \log r + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots \\ \quad = a_0 + b_0 \log r + \begin{cases} \dfrac{r}{R'}(a_1 \cos\theta \;+ b_1 \sin\theta) + \ldots + \left(\dfrac{r}{R'}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) + \ldots \\ + \left(\dfrac{R}{r}\right)(a_{-1}\cos\theta - b_{-1}\sin\theta) + \ldots + \left(\dfrac{R}{r}\right)^m (a_{-m}\cos m\theta - b_{-m}\sin m\theta) + \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Admettons, pour un instant, que cette série soit uniformément convergente, écrivons que l'on a

$$f(R,\theta) = U, \qquad f(R',\theta) = U',$$

et déterminons les coefficients par ces conditions à la manière de Fourier. Nous aurons les équations suivantes, où toutes les intégrales sont prises entre o et 2π,

$$\int U\,d\psi = 2\pi(a_0 + b_0 \log R), \qquad \int U'\,d\psi = 2\pi(a_0 + b_0 \log R'),$$

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^m a_m + a_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U \cos m\psi\,d\psi, \qquad a_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m a_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U' \cos m\psi\,d\psi,$$

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^m b_m - b_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U \sin m\psi\,d\psi, \qquad b_m - \left(\frac{R}{R'}\right)^m b_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U' \sin m\psi\,d\psi.$$

(Dans ces intégrales, on a remplacé θ par ψ dans les fonctions U et U'). Ces équations déterminent sans ambiguïté tous les coefficients. On en tire

$$(12)\quad \begin{cases} U_m = \left(\dfrac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int U \cos m(\theta - \psi)\,d\psi, \\ U'_m = X_m + \left(\dfrac{R}{R'}\right)^m Y_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int U' \cos m(\theta - \psi)\,d\psi \end{cases}$$

avec

$$(13)\quad U_0 = a_0 + b_0 \log R = \frac{1}{\pi}\int \tfrac{1}{2} U\,d\psi, \qquad U'_0 = a_0 + b_0 \log R' = \frac{1}{\pi}\int \tfrac{1}{2} U'\,d\psi.$$

Il faut maintenant faire voir que la série (11), dont nous venons ainsi de déterminer les coefficients, est uniformément convergente, représente une fonction harmonique, et satisfait effectivement aux conditions aux limites. Considérons, à cet effet, la somme des $n+1$ premiers termes de la série U_0, U_1, …, U_m, …, qui devra représenter $f(R, \theta)$. D'après les for-

[illegible]

[illegible] formule [illegible]. [illegible] une fonction harmonique régulière [illegible]. Tous les raisonnements [illegible] dans la théorie des séries trigonométriques [illegible] immédiatement applicables. Il en résulte que la série [illegible] est uniformément convergente sur toute la [illegible] pour valeur [illegible].

[illegible] $\sum$ [illegible] converge uniformément sur [illegible] et représente [illegible]. Donc, [illegible] théorème de Harnack, la série dont le terme général est [illegible] une fonction harmonique dans S et tend vers [illegible] ou vers [illegible] quand le point [illegible] se rapproche de [illegible] ou de [illegible] par un chemin quelconque. La fonction $f(r, \theta)$ résout donc le problème.

On peut remarquer que, en résolvant les équations [illegible] par rapport à X_m et Y_m, on obtient des expressions [illegible] est facile de déduire, pour le module de ces quantités, la limite supérieure que voici

$$\frac{R}{R'} [illegible] \left[\int [illegible] \operatorname{mod} U - \operatorname{mod} U' \right] [illegible]$$

[illegible] que m soit supérieur à m_0.

On en conclut que les deux séries

$$\sum \left(\frac{r}{R'}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \qquad \sum \left(\frac{R}{r}\right)^m (a_{-m} \cos m\theta - b_{-m} \sin m\theta)$$

sont absolument convergentes.

On peut donc changer l'ordre des termes dans $f(r, \theta)$ et l'écrire

$$f(r, \theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_1^\infty \left(\frac{r}{R'}\right)^m X_m - \sum_1^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^m Y_m.$$

7. Revenons maintenant à l'aire S pour laquelle nous voulons résoudre le problème de Dirichlet.

Je dis d'abord que l'on peut toujours trouver des cercles C_i tout entiers intérieurs à S, formant une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots,$$

et tels, que tout point intérieur à S soit intérieur à au moins l'un des cercles C_i.

Pour le faire voir, considérons dans S une région R dont tous les points soient à une distance de s supérieure à δ. Soit δ' une longueur plus petite que δ, et traçons une série de parallèles aux axes de coordonnées ayant entre elles la distance constante $\frac{\delta'}{\sqrt{2}}$.

Nous formons ainsi une infinité de carrés, dont la diagonale est δ'. Nous ne retiendrons parmi eux que ceux qui sont en totalité ou en partie intérieurs à R, lesquels sont naturellement en nombre limité. Tout point de R est alors intérieur à l'un de ces n carrés, ou sur son contour. Ceux mêmes de ces carrés qui sont partiellement extérieurs à R sont encore sûrement intérieurs à S, puisque leur plus grande dimension δ' est inférieure à δ.

Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les centres de ces carrés; de chacun de ces points comme centre, avec un rayon intermédiaire entre $\frac{\delta}{2}$ et $\frac{\delta'}{2}$, décrivons une circonférence. Chaque carré est alors tout entier intérieur au cercle correspondant, lequel est toujours intérieur à S. Chaque point de R est alors intérieur à l'un de ces n cercles.

Imaginons alors une série de longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ décroissant et tendant vers o. Appelons R_0 la région formée par l'ensemble des points de S dont la distance à s est supérieure à δ_1, puis, d'une manière générale, appelons R_i l'ensemble des points de S dont la distance à s est comprise entre δ_i et δ_{i+1}. (Ces régions ne seront pas nécessairement connexes, mais ceci importe peu.)

Construisons dans R_0 les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{n_0}$ comme plus haut, puis, dans R_1, les cercles $C_{n_0+1}, C_{n_0+2}, \ldots, C_{n_1}, \ldots$.

Nous aurons ainsi construit les cercles demandés.

Il est clair que l'on aurait pu les construire d'une infinité de manières différentes. L'important est de voir qu'on peut leur donner pour indices la suite des nombres entiers.

8. Après avoir ainsi construit dans S la famille des cercles C_i, traçons encore une courbe fermée L qui contienne dans son intérieur la partie du plan où se trouve S. Cette courbe sera arbitraire, pourvu qu'elle soit suffisamment grande. Mettons, pour fixer les idées, que ce soit une circonférence ayant son centre dans S et un rayon supérieur au double de la plus grande dimension de S.

Appelons T la partie du plan intérieure à L.

Il pourra arriver que l'on connaisse une fonction $V_0(x, y)$ qui, à l'intérieur de T, soit holomorphe et qui, sur s, se réduise à U (U étant toujours la fonction donnée sur le contour s et qui est seulement supposée être continue). Nous allons résoudre le problème dans ce cas particulier, auquel nous ramènerons ensuite le cas général.

Supposons d'abord que ΔV_0 soit constamment négatif dans T. Si alors on pose

$$-\frac{\Delta V_0}{2\pi} = \rho,$$

ρ sera une fonction holomorphe et positive dans T.

Imaginons une masse répandue d'une manière continue sur T et dont la densité en chaque point serait justement la fonction ρ. Cette masse aura un potentiel W_0, et l'on aura, dans toute la région T,

$$\Delta W_0 = -2\pi\rho = \Delta V_0, \qquad \Delta(W_0 - V_0) = 0.$$

La différence $W_0 - V_0 = \theta$ est donc une fonction harmonique dans T, et nous est parfaitement connue, puisque nous connaissons W_0 et V_0 pour tous les points de T. En particulier, nous connaissons les valeurs $\theta(s)$ que prend θ sur le contour s qui est tout entier intérieur à T, et nous avons

$$\theta(s) = W_0(s) - U. \tag{14}$$

Les masses qui engendrent le potentiel W_0 sont toutes positives, et une partie d'entre elles est intérieure à S. Envisageons en particulier celles qui sont intérieures au cercle C_i.

Nous avons appris au n° 4 à former une couche équivalente à ces masses. Comme nous aurons à répéter souvent cette opération, il est bon de lui donner un nom spécial. Nous l'appellerons, avec M. Poincaré, le *balayage* du cercle C_i.

Nous pourrons dire alors que le balayage du cercle C_i ne change pas le potentiel en un point quelconque extérieur à C_i, mais le diminue en tout point intérieur. Cette opération n'altère pas non plus la somme totale des masses et n'introduit jamais de masses négatives.

Balayons alors successivement tous les cercles dans un ordre tel que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois. Il suffira, pour cela, de les balayer dans l'ordre

$$1\ 2, \quad 1\ 2\ 3, \quad 1\ 2\ 3\ 4, \quad \ldots,$$

en ne tenant cependant aucun compte de ceux qui pourraient ne contenir aucune masse quand viendrait leur tour d'être balayés. Ainsi, par exemple, si, après la septième opération, le cercle C_3 ne contenait aucune masse, on prendrait à sa place le cercle C_4.

Appelons enfin W_k ce que devient le potentiel après la $k^{\text{ième}}$ opération et comparons entre elles les valeurs des différentes quantités W_k en un même point A.

Il est clair que, si A est extérieur au cercle balayé à la $k^{\text{ième}}$ opération, on aura

$$W_k = W_{k-1}.$$

Dans le cas contraire, on aura

$$W_k < W_{k-1}.$$

Donc, dans tous les cas,

$$W_k \leqq W_{k-1}.$$

W_k va donc en décroissant ou tout au moins ne va jamais en croissant quand l'indice augmente. Remarquons que, si A est extérieur à S, il est aussi extérieur à tous les cercles. A l'extérieur de S, on a donc

$$W_k = W_0.$$

Nous allons voir maintenant que, lorsque k augmente indéfiniment, W_k tend vers une limite W, déterminée en chaque point de T, et tendant vers $U(s) + \theta(s)$ quand A tend vers le point s du contour.

Pour le démontrer, construisons un cercle tangent en s au contour et tout entier extérieur à S. Construisons aussi un second cercle concentrique au premier, contenu tout entier dans T et comprenant S dans son intérieur,

ce qui est possible si T a les dimensions que nous avons indiquées et si le rayon du premier cercle est assez petit.

Comme nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire comprise entre deux cercles concentriques, nous pouvons construire une fonction ω, harmonique entre les deux cercles, et prenant sur ces cercles les mêmes valeurs que W_0. Étudions la différence $F = W_n - \omega$. Elle est nulle sur les deux cercles qui sont tous deux extérieurs à S, et où, par suite, on a $W_n = W_0$. Nous allons montrer qu'elle est positive dans toute la couronne. Il suffit, pour cela, de faire voir qu'elle n'y peut admettre de minimum.

Or, si F pouvait avoir un minimum en un point B de cette couronne et que l'on traçât autour de B comme centre un cercle assez petit, la valeur de F en tout point de ce cercle, et, par suite, sa valeur moyenne sur le cercle, serait plus grande que sa valeur en B. Calculons cette moyenne. On a

$$\mathfrak{M} F = \mathfrak{M} W_n - \mathfrak{M} \omega.$$

Mais W_n est un potentiel, ω est une fonction harmonique.

Donc, d'après les formules (5) et (2 *bis*),

$$\mathfrak{M} F = \sum m \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{R} \sum \mu - \omega(B).$$

D'ailleurs, au point B, on a

$$F(B) = \sum m \log \frac{1}{r} + \sum \mu \log \frac{1}{r} - \omega(B).$$

Donc

$$\mathfrak{M} F - F(B) = \log \frac{1}{R} \sum \mu - \sum \mu \log \frac{1}{r}.$$

(Je rappelle que, dans ces formules, m désigne les masses extérieures au cercle, μ les masses intérieures, r la distance d'un point au centre, R le rayon.)

Cette différence est évidemment négative, puisque, pour tout point intérieur,

$$1 < \frac{1}{R} < \frac{1}{r},$$

et cette conclusion est contradictoire avec l'hypothèse d'un minimum.

On a donc, pour tout point de S, et quel que soit n,

$$W_n > \omega.$$

Donc W_n tend vers une limite W qui est supérieure ou égale à ω, et l'on a

$$W_n > W \geqq \omega.$$

Imaginons maintenant que le point mobile A tende vers s.

W_n et ω tendent tous deux vers la valeur de W_0 au point s, W tend donc aussi vers cette valeur qui est $U(s) + \theta(s)$.

Nous constatons donc l'existence d'une fonction W, définie dans l'intérieur de S et tendant vers $U + \theta(s)$ quand A se rapproche du contour. Nous allons voir aussi qu'elle est harmonique dans S.

Envisageons un des cercles, C_α par exemple, et supposons que ce cercle soit balayé aux opérations $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Après chacune de ces opérations, le cercle C_α ne contient plus aucune masse. On a donc, à l'intérieur de ce cercle,

$$\Delta W_{\alpha_i} = 0.$$

Or les quantités

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad W_{\alpha_n}, \quad \ldots$$

sont des fonctions harmoniques, décroissantes, et ont pour limite W.

La série

$$W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + (W_{\alpha_3} - W_{\alpha_2}) + \ldots + (W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n-1}}) + \ldots$$

a donc tous ses termes de même signe, sauf peut-être le premier. Ils sont harmoniques dans C_α; la somme des n premiers termes est W_{α_n} qui tend vers W. La série est donc convergente et définit une fonction W harmonique dans C_α d'après le premier théorème de Harnack.

On a donc $\Delta W = 0$ dans toute l'étendue de S, puisque tout point de S est intérieur à un cercle C_α.

La fonction $W - \theta$ est harmonique dans toute l'étendue de S et tend vers U sur le contour s. C'est donc la solution du problème de Dirichlet.

On a supposé dans cette démonstration que ΔV_0 conservait dans T un signe constant. Si cela n'était pas, on pourrait toujours partager T en deux régions T_1 et T_2, la première contenant tous les points pour lesquels $-\frac{\Delta V_0}{2\pi}$ est positif, la seconde, tous ceux pour lesquels la même quantité est

négative. Définissons alors des fonctions ρ_1 et ρ_2 par les conditions suivantes

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho \text{ dans } T_1, \\ 0 \text{ dans } T_2; \end{cases} \qquad \rho_2 = \begin{cases} 0 \text{ dans } T_1, \\ -\rho \text{ dans } T_2. \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont, dans toute l'étendue de T, continues et positives ou nulles. Et, de plus, on a

$$\rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Considérons alors deux systèmes de masses ayant des densités ρ_1 et ρ_2. Elles engendreront deux potentiels W_0^1 et W_0^2 qui, dans toute l'étendue de T, donneront lieu aux relations

$$\frac{\Delta W_0^1}{-2\pi} = \rho_1, \qquad \frac{\Delta W_0^2}{-2\pi} = \rho_2, \qquad \frac{\Delta(W_0^1 - W_0^2)}{-2\pi} = \rho_1 - \rho_2 = \rho,$$

$$\Delta(W_0^1 - W_0^2 - V_0) = 0.$$

On a donc

$$W_0^1 - W_0^2 - V_0 = \theta,$$

θ étant encore harmonique dans T et bien connue.

Alors les raisonnements précédents s'appliquent mot pour mot aux deux fonctions W_0^1 et W_0^2 traitées isolément. Elles engendrent respectivement deux fonctions W^1 et W^2 harmoniques dans S et prenant sur le contour les mêmes valeurs que W_0^1 et W_0^2. La fonction $W^1 - W^2 - \theta$ résout donc le problème.

Nous avons supposé implicitement chacune des régions T_1 et T_2 connexe. Dans le cas contraire, on les décomposerait en plusieurs régions connexes, et l'on considérerait séparément les fonctions ρ relatives à chacune de ces régions; les mêmes raisonnements seraient, d'ailleurs, applicables.

9. Nous venons de résoudre le problème dans un cas particulier. Il est aisé d'y ramener le cas général. Voici la marche que nous allons suivre.

On peut toujours bien facilement, et cela d'une infinité de manières, construire une fonction $\psi(x, y)$, continue dans la région T et prenant sur s les valeurs données U. Nous ne faisons ici sur ψ aucune autre hypothèse que celle de la continuité.

Nous montrerons alors que l'on peut trouver une infinité de polynômes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_n, \quad \ldots$$

croissants et tendant uniformément vers ψ dans toute la région T. Appelons

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

les valeurs de ces polynômes sur s. Ces fonctions U_n sont croissantes et tendent uniformément vers U.

Nous savons alors résoudre le problème de Dirichlet pour chacune des valeurs

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

de la fonction donnée sur le contour, et nous trouvons une suite

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots$$

de fonctions harmoniques dans S. Nous montrerons que ces fonctions V_n tendent vers une limite V qui est la fonction cherchée.

Rappelons à cet effet que, d'après un théorème de M. Picard [1], on peut toujours trouver un polynôme $F(x, y)$ qui représente, avec une erreur moindre qu'un nombre ε donné d'avance, une fonction $\psi(x, y)$ arbitrairement définie dans une aire T et assujettie à la seule condition d'être continue.

Soit alors $\psi(x, y)$ une fonction continue définie dans l'aire T et se réduisant à U sur les lignes s. Appelons M et m ses limites supérieure et inférieure dans T. Nous pouvons toujours supposer ψ positive; dans le cas contraire, il suffirait de raisonner sur la fonction $\psi + C$, C désignant une constante convenable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ une suite infinie de nombres positifs, croissants et tendant vers l'unité, et posons

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \delta_i$$

en supposant encore $\delta_i > \delta_{i+1}$.

Toutes ces conditions seront réalisées en prenant, par exemple,

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2^i}.$$

Considérons enfin la suite de fonctions continues, positives, croissantes,

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXII, et *Traité d'Analyse*, t. I, p. 262.

et tendant vers ψ

$$\lambda_1\psi, \quad \lambda_2\psi, \quad \ldots, \quad \lambda_n\psi, \quad \ldots$$

et construisons le polynôme $F_i(x, y)$ qui représente $\lambda_i\psi$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}\delta_i m$.

Ces polynômes F_i forment une suite croissante, car on a

$$F_{i+1} > \lambda_{i+1}\psi - \tfrac{1}{2}\delta_{i+1} m, \quad F_i < \lambda_i\psi + \tfrac{1}{2}\delta_i m,$$
$$F_{i+1} - F_i > \lambda_{i+1}\psi - \lambda_i\psi - \tfrac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1}) m > \delta_i m - \tfrac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1}) m > 0.$$

Les F_i forment donc une suite croissante qui tend uniformément vers ψ. Si donc on appelle U_i la valeur de F_i sur s, les U_i forment aussi une suite croissante tendant uniformément vers U.

Maintenant, nous savons, au moyen de chaque fonction F_i, construire une fonction V_i harmonique dans S et se réduisant à U_i sur s.

Ces fonctions V_i forment aussi une suite croissante, puisque la différence $V_{i+1} - V_i$, qui est harmonique dans S, prend sur s les valeurs positives $U_{i+1} - U_i$.

D'ailleurs V_i est toujours inférieur à M, puisqu'il en est de même de U_i.

Les fonctions V_i ont donc une limite V. Je dis que V est la fonction cherchée.

Considérons, en effet, la série convergente

$$V = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \ldots + (V_n - V_{n-1}) + \ldots.$$

Chaque terme de la série est harmonique dans S, et le terme général $V_n - V_{n-1}$ tend vers $U_n - U_{n-1}$ quand le point mobile se rapproche du contour.

D'ailleurs la série de ces valeurs au contour

$$U_1 + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \ldots + (U_n - U_{n-1}) + \ldots$$

converge uniformément vers U sur tout le contour.

Donc, d'après le second théorème de Harnack, la fonction V est harmonique dans S et tend vers U sur s. C. Q. F. D.

10. Jusqu'à présent, nous avons supposé que le contour s avait en chaque point une tangente bien déterminée et dont la direction variait d'une manière continue. Nous allons voir que la même méthode donne encore la solution du problème dans le cas où, en un nombre limité de points, la direction de la tangente varie brusquement d'un angle fini.

Soit M un point de s où il existe deux tangentes. Nous appellerons *angle de ces tangentes* et nous désignerons par $\alpha\pi$ l'angle dont il faut faire tourner la tangente à l'un des arcs issus de M pour l'amener à coïncider avec la tangente au second arc *en balayant l'intérieur de* S. Cet angle est toujours compris entre o et 2π et peut d'ailleurs atteindre ces limites.

Ainsi, par exemple, cet angle est inférieur à π dans les *fig.* 4 et 5 et supérieur à π dans les *fig.* 6 et 7.

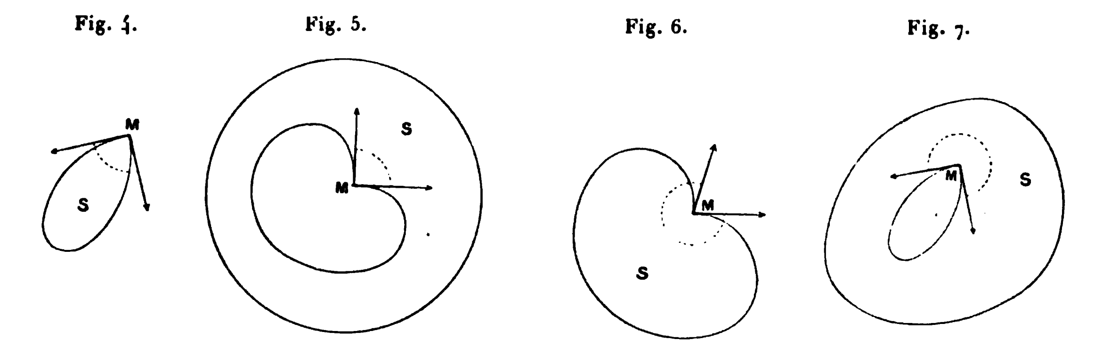


Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

A quel moment la méthode pourrait-elle cesser d'être applicable? Nous pourrons toujours encore construire les cercles C_i, définir un potentiel W_0, balayer les cercles C_i. En tout point non singulier de s, nous pouvons encore construire un cercle tangent extérieurement, et, par suite, nous savons encore que la méthode conduit dans tous les cas à une fonction V harmonique dans S et tendant vers U quand le point mobile x, y se rapproche d'un point quelconque *non singulier* de s. La seule question qui reste douteuse est donc de savoir si cette dernière propriété subsiste encore en un point tel que M.

Or la chose est d'abord évidente pour un point anguleux pour lequel on a

$$0 \leqq \alpha \leqq 1;$$

car on peut toujours, en un tel point, construire un cercle passant par M et tout entier extérieur à S. Le raisonnement général reste donc applicable.

Mais nous ne pourrons plus construire ce cercle en un point M pour lequel on aurait

$$1 < \alpha \leqq 2.$$

On ramènerait facilement ce cas au cas précédent, au moins tant que l'on ne rencontrerait pas en un sommet deux arcs présentant un contact d'ordre

supérieur au premier, en combinant convenablement un nombre fini d'inversions et de transformations conformes du type

$$Z = (z - z_0)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mais le procédé suivant semble plus élégant et, en outre, aura l'avantage de s'appliquer quel que soit l'ordre des contacts.

Soient u et v deux variables complexes dans des plans différents, et considérons les deux relations concordantes

$$u = v + \sqrt{v^2 - c^2}, \qquad v = \frac{u^2 + c^2}{2u}.$$

Soient F et F′ les points $v = +c$, $v = -c$.

Il est facile de voir que, par cette transformation, l'aire comprise dans le plan des u entre deux cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons des longueurs R et R′ supérieures à c sera représentée d'une manière conforme sur l'aire comprise, dans le plan des v, entre deux ellipses de foyers F et F′. Si le plus petit rayon R′ tend vers c, l'ellipse intérieure s'aplatira indéfiniment et aura pour limite le segment FF′. En d'autres termes, étant donnée l'aire doublement connexe comprise entre une ellipse et le segment FF′ considéré comme une ellipse infiniment aplatie, nous savons en faire la représentation conforme sur une couronne circulaire convenablement choisie, et, par suite, nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour cette aire elliptique.

Revenons alors à la méthode de M. Poincaré. Nous avons vu que, dans tous les cas, elle conduit à une fonction V harmonique dans l'aire et tendant vers U toutes les fois que le point mobile tend vers un point du contour qui n'est pas un point singulier d'angle supérieur à π. Il nous restait à examiner ce qui se passe en ces derniers points.

Si l'on a $\alpha < 2$, ou si, α étant égal à 2, les deux branches de courbe sont de part et d'autre de la tangente, on pourra toujours, à partir du point M, tracer un petit segment rectiligne MM′ tout entier extérieur à l'aire. De M et M′ comme foyers décrivons une ellipse intérieure à T mais comprenant S tout entière à son intérieur. Nous avons ainsi formé une aire elliptique doublement connexe qui peut remplacer la couronne circulaire dont nous nous sommes servi jusqu'à présent. La suite des raisonnements n'est pas changée, et la proposition que nous avions en vue est démontrée.

Si, au contraire, les deux branches de courbe sont d'un même côté de la tangente, il faudra modifier légèrement la méthode. Quel que soit l'ordre de leur contact, on pourra toujours tracer un arc de courbe analytique MM′ circulant entre les deux branches de courbe et tout entier extérieur à l'aire. La portion du plan voisine de cet arc (1) pourra être représentée sur le plan de manière que l'arc MM′ se transforme en un segment rectiligne FF′. De F et F′ comme foyers, traçons alors une petite ellipse située tout entière dans la portion du plan où la transformation est valable. A cette ellipse correspond dans l'ancien plan une petite courbe fermée σ qui est en partie intérieure et en partie extérieure à S. Nous avons ainsi défini une petite aire Σ doublement connexe, limitée par la courbe σ et la coupure curviligne MM′, pour laquelle nous savons résoudre le problème de Dirichlet, puisque Σ est représentable sur une couronne circulaire.

Cela posé, rappelons-nous que l'existence de la fonction W est démontrée pour l'aire T tout entière. A l'extérieur de S elle est égale à W_0. A l'intérieur de S, elle est harmonique et tend vers W_0 quand le point mobile se rapproche d'un point non singulier du contour. Formons alors une fonction ω, harmonique dans Σ, prenant sur σ les mêmes valeurs que W, et sur MM′ les mêmes valeurs que W_0, et considérons, comme au n° 8, la différence

$$F = W_n - \omega.$$

On démontrera, comme à cet endroit, que F ne peut avoir de minimum en aucun point de Σ. D'ailleurs F est positive ou nulle sur tout le contour de Σ. On a donc, dans σ,

$$W_n > \omega,$$

quel que soit n, et, par suite,

$$W_n > W > \omega.$$

On voit alors, comme au n° 8, que W tend vers W_0, même au point M.

La méthode réussit donc pleinement, quelle que soit la nature des pointes que peut présenter le contour.

(1) *Voir*, par exemple, J. Riemann, *loc. cit.*, Chap. III.

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION $\Delta u = f(x, y)$.

1. L'équation $\Delta u = f(x, y)$ se présente naturellement après celle que nous venons d'étudier. Elle en est même inséparable, car son intégration se ramène, comme nous allons voir, au problème de Dirichlet. Nous nous proposons de montrer que l'on peut trouver une fonction u, finie et continue dans une aire donnée S ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, vérifiant l'équation proposée, et prenant sur le contour s de S des valeurs données d'avance. La fonction $f(x, y)$ qui figure dans le second membre sera supposée continue dans S, et, de plus, nous supposerons qu'elle admet dans cette région des dérivées partielles du premier ordre continues.

Il est d'abord évident qu'il ne peut exister deux fonctions u et u' satisfaisant aux conditions énoncées, car leur différence $u - u'$ satisferait évidemment à l'équation de Laplace et s'annulerait sur s.

Elle serait donc identiquement nulle.

La solution est donc unique, si toutefois elle existe.

Soient encore u et v deux fonctions vérifiant l'équation. On aura de nouveau

$$u - v = \theta,$$

θ étant harmonique dans S. Si v s'annule sur le contour s, θ prendra sur s la même succession de valeurs que u. Notre problème sera donc complètement résolu si nous trouvons une intégrale v de l'équation s'annulant sur le contour, car, pour achever la solution, il suffira de résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire S et la succession donnée U de valeurs sur le contour. Soit θ la fonction harmonique ainsi déterminée, alors

$$u = v + \theta$$

sera la solution du problème proposé.

Il nous reste donc seulement à trouver la fonction v.

2. Nous y arriverons aisément par l'emploi de la fonction connue sous le nom de *fonction de Green*, et dont voici la définition. Elle est harmonique dans S, excepté en un seul point P où elle devient infinie comme $\log\frac{1}{r}$, r désignant la distance du point mobile xy au point P. De plus, elle s'annule sur le contour.

Il existe évidemment une fonction, et une seule, répondant à ces conditions.

Formons, en effet, une fonction ω harmonique dans S et prenant sur s les mêmes valeurs que $\log\frac{1}{r}$. Alors la différence

$$G(x, y;\, a, b) = \log\frac{1}{r} - \omega \tag{1}$$

sera la fonction cherchée (nous désignons par a, b les coordonnées du point P). Il ne peut en exister une seconde, car on voit sans peine que la différence de deux fonctions G serait identiquement nulle.

Pour abréger, nous appellerons P le pôle de la fonction de Green, comme le font plusieurs auteurs, bien que ce mot soit employé avec une autre acception dans la théorie des fonctions d'une variable [1].

La fonction de Green jouit de l'importante propriété exprimée par l'égalité suivante

$$G(a, b;\, a_1, b_1) = G(a_1, b_1;\, a, b). \tag{2}$$

On le démontre en entourant chacun des deux points ab, $a_1 b_1$ d'un petit cercle, et appliquant à l'aire Σ, qui résulte de S par la suppression des aires de ces deux petits cercles, la formule de Green

$$\iint_\Sigma [U\Delta V - V\Delta U]\, d\Sigma + \int_\sigma \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

dans laquelle on fera

$$U = G(x, y;\, a, b), \qquad V = G(x, y;\, a_1, b_1).$$

Rappelons que, dans l'application de cette formule, les dérivées $\frac{d}{dn}$ sont

[1] Cf. Harnack, *loc. cit.*

prises dans la direction de la normale intérieure à l'aire Σ, et que chaque courbe du contour est parcourue dans le sens direct relatif à cette courbe prise isolément. Je n'insiste pas sur cette démonstration qui est classique (¹).

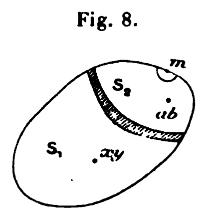
Il en résulte que si, laissant fixe le point xy, nous considérons le pôle ab comme variable, les fonctions $G(a, b)$ et $\omega(a, b)$ seront harmoniques, la première dans S sauf au point xy, la seconde dans toute l'étendue de S.

Par suite aussi, xy restant fixe, $G(a, b)$ tendra vers o quand ab tendra vers un point du contour.

Nous allons présenter ces conséquences sous une forme un peu différente qui nous sera utile plus loin.

Détachons de S (*fig.* 8) une bande mince, mais d'épaisseur finie, qui

Fig. 8.



décompose S en deux parties séparées S_1 et S_2, et supposons que xy soit mobile dans S_1 et ab dans S_2.

$G(x,y; a, b)$ deviendra alors une fonction continue des quatre paramètres x, y, a, b et, d'après un théorème général, cette fonction sera *uniformément* continue dans les conditions où nous sommes placé. Autrement dit, à tout nombre ε on pourra faire correspondre un nombre ρ tel, que si l'on considère deux cercles de rayon ρ n'empiétant pas sur la bande mince et ayant pour centres l'un un point quelconque de S_1, l'autre un point quelconque de S_2, la variation de G sera inférieure à ε tant que xy ne sortira pas du premier cercle et ab du second.

Si donc nous prenons un point m sur la partie de s qui appartient à S_2, comme centre d'un arc de cercle de rayon ρ, et si ab ne sort pas de ce petit cercle, on aura

$$G(x,y; a, b) < \varepsilon,$$

(¹) *Voir*, par exemple, Riemann : *Schwere, Elektricität und Magnetismus.*

quel que soit x, y dans S_1, puisque l'on a rigoureusement $G(x, y; a, b) = 0$, quel que soit x, y dans S_1 quand a, b est au point m lui-même.

Dans la dernière inégalité, nous avons écrit G et non pas $|G|$, parce que la fonction de Green est toujours positive.

3. Proposons-nous maintenant de trouver l'intégrale continue v qui s'annule sur le contour de S.

Soit a, b un point quelconque intérieur à S. Entourons ce point d'un petit cercle c et considérons l'aire S' limitée par s et c. Soit $G(x, y; a, b)$ la fonction de Green relative au point a, b.

Les deux fonctions v et G sont, par hypothèse, finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres dans l'aire S'. On peut donc leur appliquer la formule de Green relativement à cette aire

$$\int\int_{S'} (v\,\Delta G - G\,\Delta v)\,dx\,dy + \int_s \left(v\frac{dG}{dn} - G\frac{dv}{dn}\right) ds + \int_c \left(v\frac{dG}{dn} - G\frac{dv}{dn}\right) dc = 0.$$

Or ΔG est nul dans S', quelque petit que soit c. La première intégrale se réduit donc à $-\int\int_{S'} G\,\Delta v\,dx\,dy$. Mais on a $\Delta v = f(x, y)$, et l'intégrale $\int\int_c f(x, y) G\,dx\,dy$ tend vers 0 quand c tend lui-même vers 0, comme on le voit en employant des coordonnées polaires et remarquant que le produit rG tend vers 0 avec r. La première intégrale tend donc vers une limite finie et déterminée

$$-\int\int_S f(x, y)\,G(x, y, a, b)\,dx\,dy$$

quand le cercle c tend vers 0.

La seconde intégrale, relative au contour s, est nulle, puisque v et G sont nuls sur s [1].

La troisième intégrale peut s'écrire de la façon suivante :

$$\int_c v\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}\,dc - \int_c \left(v\frac{d\omega}{dn} + G\frac{dv}{dn}\right) dc,$$

---

[1] Ceci suppose, à la vérité, que $\frac{dv}{dn}$ reste finie en tous les points du contour; mais nous verrons que tel est le cas.

en tenant compte de la définition de G. D'ailleurs,

$$\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r}\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{r}.$$

On a donc

$$\int_c v\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}dc = -\int_0^{2\pi} v\,d\theta,$$

et cette intégrale a pour limite $-2\pi v(a, b)$.

L'intégrale $\int_c\left(v\frac{d\omega}{dn} + G\frac{dv}{dn}\right)dc$ tend évidemment vers o.

On a donc finalement

$$(3) \qquad v(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S f(x, y)\,G(x, y; a, b)\,dx\,dy,$$

et nous avons ainsi la valeur de la fonction cherchée au point a, b.

Mais nous l'avons obtenue en supposant qu'il existe effectivement une fonction v, ce qui n'est nullement évident. Il faut donc démontrer inversement que la fonction v, définie par l'équation précédente (3), satisfait aux conditions suivantes :

Elle est continue dans S;

Elle y admet des dérivées du premier ordre continues;

Elle y admet des dérivées du second ordre continues;

Elle vérifie l'équation $\Delta v = f(x, y)$;

Elle s'annule sur le contour.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

4. Le premier point demande à peine une démonstration. Traçons autour de a, b un petit cercle c. Soient S_1 la partie de l'aire extérieure à ce cercle, S_2 l'intérieur de ce cercle.

L'intégrale relative à S_1 est évidemment continue tant que a, b reste dans le cercle. L'intégrale S_2 peut être rendue aussi petite que l'on veut, puisqu'elle tend vers o avec le rayon du cercle. L'intégrale totale est donc une fonction continue de a, b.

Le second point est un peu plus délicat. Bien que l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_S f(x, y)\frac{\partial G(x, y, a, b)}{\partial a}dx\,dy$$

ait une valeur finie et déterminée, comme on le voit en employant des coordonnées polaires, il n'est pas certain qu'elle représente $\frac{\partial v}{\partial a}$, car nous ne sommes pas dans les conditions où l'on peut, sans crainte, différentier sous le signe sommatoire.

Il est donc nécessaire de montrer que l'on a bien

$$\lim_{\delta a = 0} \int\int f(x,y) \frac{G(x,y,a+\delta a,b) - G(x,y,a,b)}{\delta a} dx\,dy$$
$$= \int\int f(x,y) \frac{\partial}{\partial a} G(x,y,a,b)\,dx\,dy.$$

Décrivons un petit cercle c [1] contenant, dans son intérieur, les deux points a, b et $a+\delta a$, b. Soit S_1 la partie de S extérieure à ce cercle.

L'égalité précédente est vraie certainement pour l'aire S_1, car la fonction G et sa dérivée sont continues dans S_1.

D'ailleurs, l'intégrale $\int\int_{S_1} f(x,y) \frac{\partial}{\partial a} G(x,y,a,b)\,dx\,dy$ tend vers une limite quand le rayon du cercle c tend vers o, car l'intégrale

$$\int\int_c f(x,y) \frac{\partial G}{\partial a} dx\,dy$$

tend vers o avec c. Elle peut s'écrire, en effet,

$$\int\int_c f(x,y) \frac{x-a}{r^2} dx\,dy - \int\int_c f(x,y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx\,dy,$$

et la chose devient alors évidente si l'on emploie des coordonnées polaires.

Il reste donc seulement à montrer que l'intégrale

$$\int\int_c f(x,y) \frac{G(a+\delta a,b) - G(a,b)}{\delta a} dx\,dy$$

tend vers zéro avec le rayon du cercle c, et il suffira de démontrer ceci en remplaçant G par $\log\frac{1}{r}$.

Appelons r et r' les distances de x, y à a, b et à $a+\delta a$, b.

---

(1) Cf. Bouquet, cité par M. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I.

Dans le triangle ayant pour sommets ces trois points, on a toujours

$$|r - r'| < |\delta a|.$$

Élevons sur le milieu de a, b; $a + \delta a, b$ une perpendiculaire qui divise c en deux parties T_1 et T_2.

Dans T_1, on a $r < r'$; dans T_2, on a $r > r'$.

Considérons d'abord l'intégrale étendue à T_1

$$\int\int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\delta a} dx\, dy.$$

On a, dans T_1,

$$\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r} = \log \frac{r}{r'} = \log\left(1 - \frac{r' - r}{r'}\right) = -\left[\frac{r' - r}{r'} + \frac{1}{2}\left(\frac{r' - r}{r'}\right)^2 + \ldots\right],$$

développement possible, puisque r est plus petit que r'.

Or la série entre crochets est inférieure à la progression géométrique dont la raison est $\frac{r' - r}{r'}$ et qui a pour somme

$$\frac{r' - r}{r'} : \left(1 - \frac{r' - r}{r'}\right) = \frac{r' - r}{r}.$$

On a donc

$$\left|\frac{1}{\delta a}\left(\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}\right)\right| < \frac{r' - r}{r} \frac{1}{|\delta a|} < \frac{1}{r}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int\int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\delta a} dx\, dy$ a donc un module plus petit que $\displaystyle\int\int_{T_1} f(x, y)\, dr\, d\theta$, c'est-à-dire plus petit que $2\pi MD$, en appelant M le maximum du module de $f(x, y)$ dans c et D le diamètre de c.

On répéterait la même démonstration pour l'aire T_2.

Il résulte de là que l'intégrale relative au cercle c peut être rendue aussi petite que l'on veut. On a donc bien

$$\frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S f(x, y) \frac{\partial G}{\partial a} dx\, dy,$$

et cette dérivée est une fonction continue, puisque nous avons vu que l'in-

tégrale du second membre, étendue seulement au cercle c, peut être rendue aussi petite que l'on veut.

5. Si maintenant nous passons aux dérivées secondes, le même raisonnement ne sera plus applicable, car l'intégrale

$$\int\int_S f(x,y)\frac{\partial^2 G}{\partial a^2}\,dx\,dy$$

n'a plus de sens. Un artifice est nécessaire; nous l'empruntons à Riemann ([1]). Partons de l'expression obtenue

$$-2\pi\frac{\partial v}{\partial a}=\int\int f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy-\int\int f(x,y)\frac{\partial \omega}{\partial a}\,dx\,dy.$$

La seconde intégrale admet des dérivées de tous les ordres.

Pour transformer la première, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}=-\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}.$$

Cette substitution permettra d'intégrer par parties. Mais, pour plus de rigueur, commençons par séparer de S un petit cercle c comprenant le point A, et soit S′ l'aire ainsi obtenue. On a alors

$$\begin{aligned}\int\int_{S'} f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy&=-\int\int_{S'} f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy\\&=-\int_{s+c} f(x,y)\log\frac{1}{r}\,dy+\int\int_{S'}\frac{\partial f}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

l'intégrale curviligne est prise positivement sur le contour total de S′ et peut s'écrire

$$+\int_s f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds+\int_c f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,dc.$$

Dans ces deux intégrales, α désigne l'angle de la normale intérieure à S′ avec l'axe des x, et chaque courbe doit être décrite, en ayant à gauche l'aire enveloppée par la courbe.

([1]) Riemann-Hattendorf, *Schwere, Elektricität und Magnetismus.*

Si maintenant on fait décroître le rayon du cercle c, les intégrales doubles relatives à S′ tendent vers les intégrales relatives à S, parce que les mêmes intégrales, étendues au cercle c, sont infiniment petites.

L'intégrale relative à s ne change pas, et celle qui est relative à c tend vers o. On a donc, en toute rigueur,

$$\int\int_S f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy = +\int_s f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds + \int\int_S \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy$$

et enfin

$$(4)\qquad 2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = -\int_s f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds - \int\int_S \frac{\partial f}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy + \int\int_S f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial a}\,dx\,dy.$$

On aura de même

$$(5)\qquad 2\pi\frac{\partial v}{\partial b} = -\int_s f(x,y)\log\frac{1}{r}\sin\alpha\,ds - \int\int_S \frac{\partial f}{\partial y}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy + \int\int_S f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial b}\,dx\,dy.$$

On voit bien maintenant que v admet des dérivées partielles du second ordre, car les trois intégrales admettent des dérivées du premier ordre, et il est clair que, si $f(x,y)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre n, v admettra des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$.

Nous pouvons, au moyen de ces expressions, former Δv. Il vient

$$(6)\qquad 2\pi\,\Delta v = +\int_s f(x,y)\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\,ds + \int\int_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dx\,dy + \int\int_S f(x,y)\,\Delta\omega\,dx\,dy.$$

[Nous avons mis le signe (+) devant les deux premières intégrales, parce que nous avons remplacé sous le signe $\int$ les dérivées en a et b par des dérivées en x et y.]

La troisième intégrale est nulle, parce que $\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial b^2} = 0$.

Mais cette expression va se simplifier bien davantage.

Reprenons l'aire S' dans laquelle les fonctions f et $\log\frac{1}{r}$ sont continues, ainsi que leurs dérivées premières. On aura, d'après une formule de Green,

$$\int\int_{S'} f(x,y)\,\Delta\log\frac{1}{r}\,dx\,dy$$
$$= -\int_{s+c} f(x,y)\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\,ds - \int\int_{S'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

D'ailleurs, $\Delta\log\frac{1}{r} = 0$ dans S'. On a donc

$$0 = \int_s f\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\,ds + \int_c f\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\,dc + \int\int_{S'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Si maintenant nous faisons décroître indéfiniment le rayon de c, la première de ces intégrales ne change pas, la seconde tend vers une limite qui est évidemment $-2\pi f(a,b)$, et la troisième tend vers $\int\int_S$. On a donc

$$(7)\quad \int_s f(x,y)\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\,ds + \int\int_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dx\,dy = 2\pi f(a,b).$$

Ajoutant membre à membre les équations (6) et (7), il vient

$$\Delta v = f(a,b);$$

v est donc bien solution de l'équation proposée.

6. Il nous reste enfin à faire voir que, quand x, y tend vers un point du contour, v tend vers 0.

Remarquons à cet effet que, si nous appelons D la plus grande corde du contour et $\frac{1}{2}$M la plus grande des deux quantités $\frac{1}{e}$ et $D\left|\log\frac{1}{D}\right|$, on aura toujours

$$0 < rG < M.$$

En effet, le produit $r\log\frac{1}{r}$, quand r varie de 0 à 1, part de 0 pour revenir à 0 en passant par un maximum égal à $\frac{1}{e}$. Si D est > 1 et que r continue à

varier de 1 à D, le produit devient négatif, et son module croît de o à

$$D\left|\log\frac{1}{D}\right|.$$

Or la fonction G est, comme on sait, toujours positive. Si l'on pose

$$G=\log\frac{1}{r}-\omega,$$

on aura toujours

$$\omega<\log\frac{1}{r}.$$

De plus, la plus grande valeur négative de ω sur le contour est certainement inférieure en valeur absolue à $\left|\log\frac{1}{D}\right|$, d'après la définition de ω.

On a donc certainement et toujours

$$-\left|\log\frac{1}{D}\right|<\omega<\log\frac{1}{r},$$

$$-r\left|\log\frac{1}{D}\right|<r\omega<r\log\frac{1}{r}$$

et *a fortiori*

$$-D\left|\log\frac{1}{D}\right|<r\omega<r\log\frac{1}{r}.$$

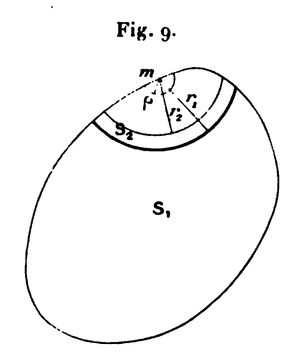
Donc, enfin,

$$-\frac{M}{2}<r\omega<\frac{M}{2},$$

$$rG<M.$$

Cela posé, soit m (*fig.* 9) un point du contour. De ce point comme centre,

Fig. 9.



avec des rayons r_1 et r_2 ($r_1>r_2$), décrivons des arcs de cercle qui vont découper dans S une bande annulaire d'épaisseur r_1-r_2. Plaçons le point a, b

à l'intérieur de r_2 et partageons l'intégrale en deux parties, l'une relative à l'extérieur S_1 de r_1, l'autre à son intérieur S_2.

Nous avons vu au n° 2 qu'on peut décrire de m comme centre un cercle de rayon ρ assez petit, pour que, a, b étant à l'intérieur de ce cercle et x, y dans S_1, on ait toujours $G < \varepsilon$.

Si donc F désigne le module maximum de $f(x, y)$ dans S, et si A désigne l'aire totale S, l'intégrale relative à S_1 aura un module inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FA\varepsilon.$$

Quant à l'intégrale relative à S_2, son module reste inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FM\, 2\pi\, 2 r_1 = 2 FM r_1.$$

On a donc, tant que a, b reste dans le cercle ρ,

$$|v| < \frac{1}{2\pi} FA\varepsilon + 2 FM r_1.$$

A, F et M sont des quantités fixes, ε et r_1 sont arbitraires et peuvent être choisis aussi petits que nous voulons. Le théorème est donc démontré.

7. Nous avons démontré plus haut que la fonction v admet des dérivées des deux premiers ordres continues dans S. Il est intéressant de savoir si ces dérivées tendent vers des valeurs finies et déterminées quand le point mobile se rapproche d'un point du contour. C'est là un fait que nous avons admis implicitement au n° 3, au moins pour les dérivées du premier ordre. Bien qu'une démonstration rigoureuse de ce point ne soit pas nécessaire pour l'objet que nous avons en vue, puisque nous avons vérifié après coup que la fonction v répond bien à la question, il peut être intéressant d'être fixé à ce sujet.

Nous ne procéderons pas directement, à cause des difficultés que présente l'emploi de la fonction G et de ses dérivées lorsque le pôle et l'argument tendent simultanément vers un point du contour, et nous traiterons d'abord le problème suivant :

Que devient la fonction v si l'on suppose que $f(x, y)$, satisfaisant encore, en général, aux conditions du problème précédent, admette un

segment AB *de l'axe des x comme ligne singulière, sur les deux bords de laquelle la fonction f et ses dérivées premières prennent des valeurs différentes, mais finies et déterminées.*

On voit tout d'abord que les raisonnements des nos 4 et 6 subsistent entièrement. La fonction v définie par la formule (3) est encore continue dans S, y admet des dérivées premières continues et tend vers o sur le contour. Mais le no 5 doit être modifié.

Reprenons la formule

$$-2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = \int\int f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy - \int\int f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial a}\,dx\,dy.$$

L'axe des x partage S en deux parties, S_1 et S_2. Supposons, par exemple, a, b dans S_1. On aura

$$-2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = \int\int_{S_1} f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy$$

$$+\int\int_{S_2} f(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy - \int\int_{S} f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial a}\,dx\,dy.$$

On peut appliquer à la première de ces intégrales la transformation du no 5 et le même résultat sera atteint pour la seconde au moyen d'une simple intégration par parties. On aura donc

$$-2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = \int_{s_1} f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds_1 + \int_{s_2} f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds_2$$

$$+\int\int_{S_1}\frac{\partial f}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy + \int\int_{S_2}\frac{\partial f}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,dx\,dy - \int\int_{S} f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial a}\,dx\,dy.$$

Il ne faut pas oublier que, dans les intégrales simples, ds est toujours pris positivement, et α est l'angle fait avec l'axe des x par la normale *intérieure* à l'aire considérée.

Si l'on remarque que s_1 et s_2 ont en commun le segment AB, il vient

$$-2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = \int_{s} f(x,y)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds$$

$$+\int_{AB}(f_1-f_2)\log\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds + \int\int_{S_1} + \int\int_{S_2} - \int\int_{S}.$$

Dans la seconde de ces intégrales, f_1 et f_2 sont les valeurs que prend

$f(x, y)$ en deux points infiniment voisins du point $(x, 0)$, mais situés, le premier dans S_1 et le second dans S_2. α est relatif à la normale intérieure à S_1.

On a, de même,

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial b} = \int_s f(x, y) \log\frac{1}{r} \sin\alpha\, ds$$
$$+ \int_{AB} (f_1 - f_2) \log\frac{1}{r} \sin\alpha\, ds + \int\int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial y} \log\frac{1}{r}\, dx\, dy + \int\int_{S_2} - \int\int_{S}.$$

Toutes ces intégrales, sauf peut-être celles qui sont relatives à AB, admettent des dérivées continues quand le point a, b tend vers un point de AB.

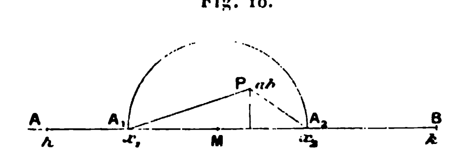
L'intégrale $\int_{AB}$ qui figure dans $\frac{\partial v}{\partial a}$ est identiquement nulle, puisque $\cos\alpha = 0$ sur AB. Il en résulte déjà que $\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial a\, \partial b}$ existent et sont continues, même quand a, b traverse AB.

Reste seulement à examiner l'intégrale suivante

$$H = \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{\partial}{\partial b} \log\frac{1}{r} \sin\alpha\, ds = -\int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b\, ds}{r^2},$$
$$r^2 = (x - a)^2 + b^2, \qquad ds = dx,$$
$$H = -\int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b\, dx}{b^2 + (x - a)^2}.$$

Soit M (*fig.* 10) le point de AB vers lequel tend a, b. Décrivons de ce

Fig. 10.



point comme centre un demi-cercle A_1, A_2 dans lequel a, b va rester en tendant vers M,

$$H = -\int_h^{x_1} (f_1 - f_2) \frac{b\, dx}{b^2 + (x - a)^2}$$
$$- \int_{x_1}^{x_2} (f_1 - f_2) \frac{b\, dx}{b^2 + (x - a)^2} - \int_{x_2}^{k} (f_1 - f_2) \frac{b\, dx}{b^2 + (x - a)^2}.$$

La première et la troisième intégrale tendent évidemment vers des limites finies quand a, b tend vers M, le cercle restant fixe.

Quant à la seconde, elle tend aussi vers une limite, puisque l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{b\,dx}{b^2+(x-a)^2} = \operatorname{arc\,tang}\frac{x_2-a}{b} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b} = \operatorname{arc} A_1PA_2,$$

dont la limite est π.

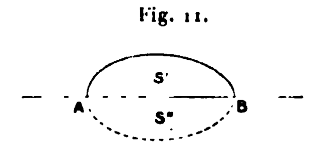
Ainsi $\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}$ tend vers une limite finie et déterminée quand a, b tend vers un point M de a, b. Mais cette limite est différente suivant que a, b tend vers M par S_1 ou par S_2.

Si l'on voulait étudier $\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial b}$ en partant de $\frac{\partial v}{\partial b}$, le même raisonnement ne serait pas immédiatement applicable, parce que l'on aurait à considérer une intégrale qui n'est pas *absolument* convergente. On surmonterait cette petite difficulté en se rappelant que $f_1 - f_2$ admet par hypothèse des dérivées premières. Mais ce calcul est inutile, puisque nous avons déjà constaté la continuité de $\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial b}$.

En résumé, les dérivées du premier ordre sont continues dans toute l'étendue de S. Il en est de même de $\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial b}$, mais $\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}$ éprouve un saut brusque en traversant la ligne singulière.

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de ce paragraphe, et supposons d'abord qu'une portion AB (*fig.* 11) de l'axe des x fasse partie

Fig. 11.



du contour s. Joignons A et B par un trait continu ne se coupant pas et détachant de S une aire S′ simplement connexe et tout entière au-dessus de l'axe des x. Appelons S″ l'aire symétrique de S′ par rapport à AB.

Nous pouvons toujours former une fonction θ harmonique dans S′ et prenant sur le contour de S′ les mêmes valeurs que v. La différence $w = v - \theta$ joue alors pour S′ le même rôle que v pour S. Définissons main-

tenant dans S″ une fonction que nous appellerons encore $f(x, y)$ et qui prendra en chaque point de S″ une valeur égale et de signe contraire à celle que prenait $f(x, y)$ au point symétrique dans S′. Nous avons ainsi une fonction $f(x,y)$ définie dans l'aire $\Sigma = S' + S''$ et admettant la droite AB pour ligne singulière.

Il existe donc une fonction W, continue ainsi que ses dérivées premières dans toute l'étendue de Σ, admettant dans S′ et dans S″ des dérivées secondes continues [1], et satisfaisant dans chacune de ces régions à l'équation $\Delta W = f(x, y)$. De plus, W s'annule sur le contour de Σ et est donnée par la formule

$$W = -\frac{1}{2\pi}\int\int_\Sigma f(x, y)\, G(x, y; a, b)\, dx\, dy.$$

Mais il est clair que W s'annule en tous les points a, b de l'axe des x, car, alors, en deux points symétriques, G prend la même valeur et f change seulement de signe, de sorte que les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux.

W s'annule donc sur le contour de S′ et coïncide, par suite, avec w dans l'aire S′. Or les dérivées des deux premiers ordres de W sont continues dans toute l'étendue de S′ et sur AB. Il en est donc de même pour w; et comme la fonction harmonique θ jouit de la même propriété, la chose se trouve ainsi démontrée pour v.

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où le segment rectiligne AB est remplacé par un arc régulier AB de ligne analytique. Formons, comme précédemment, une aire simplement connexe S′ détachée de S par une ligne analytique intérieure allant de A à B, et déterminons la fonction θ relative à cette aire. La différence $w = v - \theta$ joue le rôle de v par rapport à S′.

Effectuons alors la représentation de S′ sur un demi-cercle dont le diamètre correspondra à l'arc AB du contour primitif. Comme S′ est limitée par des lignes analytiques, la fonction de transformation et ses dérivées resteront continues et déterminées, même au delà de ce contour. D'ailleurs, par cette transformation, l'équation

$$\Delta w = f(x, y)$$

[1] Et tendant vers des valeurs déterminées, mais distinctes, quand le point mobile tend vers l'axe des x en restant dans S_1 ou dans S_2.

va devenir

$$\Delta w' = F(x', y'),$$

$F(x', y')$ étant le produit de ce que devient $f(x, y)$ par un facteur indépendant de w et dépendant seulement de la fonction de transformation. Or, à l'égard de la fonction w', définie dans l'aire S'_1 transformée de S', tout ce qui a été dit plus haut est applicable. Ses dérivées restent donc continues jusque sur le contour de S'_1. Le même résultat subsiste donc dans l'aire S' pour la fonction w, et, par suite, pour la fonction v.

Il est donc établi que les dérivées des deux premiers ordres de v restent continues sur tout arc analytique régulier du contour de S.

CHAPITRE III.

L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE.

1. Nous allons maintenant considérer l'équation générale [1]

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2D\frac{\partial u}{\partial x}+2E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, ... désignent des fonctions de x et y qui. dans une région R du plan, sont finies, continues, bien déterminées, et admettent des dérivées partielles également continues des deux premiers ordres.

On peut se proposer à l'égard de cette équation un problème analogue à celui de Dirichlet, et chercher une fonction u admettant, dans une aire S intérieure à R, des dérivées continues des deux premiers ordres, vérifiant l'équation (1) et se réduisant sur le contour s à une fonction arbitrairement donnée d'avance. Nous n'arriverons pas, sans doute, à résoudre ce problème aussi complètement que celui de Dirichlet, mais nous donnerons des conditions suffisantes, sinon nécessaires, pour qu'il existe une telle solution et qu'il n'en existe qu'une.

Nous allons, avant tout, ramener cette équation (1) à une forme plus simple qui facilitera cette recherche.

Substituons d'abord aux variables x et y de nouvelles variables X et Y au moyen des formules

$$X=\varphi(x,y),\qquad Y=\psi(x,y),$$

dont le déterminant ne devra s'annuler en aucun point de S.

L'équation va devenir

$$(2)\qquad A'\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+2B'\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}+C'\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+2D'\frac{\partial u}{\partial X}+2E'\frac{\partial u}{\partial Y}+F'u=0,$$

[1] *Voir* plus loin pour le cas d'un second membre.

et l'on aura

$$A' = A\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial y} + C\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2$$

$$C' = A\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial Y}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y} + C\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \qquad F' = F.$$

$$B' = A\,\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial x} + B\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + C\,\frac{\partial X}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial y}$$

Or il est facile de voir que, par la même substitution, la forme quadratique

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2$$

se transforme identiquement en

$$A'\,dY^2 - 2B'\,dX\,dY + C'\,dX^2,$$

à un facteur près, toujours positif, et qui n'est jamais nul ni infini.

Il résulte de là que pour ramener les termes du second ordre dans notre équation à la forme

$$A'\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B'\,\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y} + C'\,\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

où A', B', C' sont choisis arbitrairement, il suffit de chercher la substitution qui donne lieu à l'identité

$$(3) \qquad A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 \equiv \rho(A'\,dY^2 - 2B'\,dX\,dY + C'\,dY^2).$$

Nous sommes donc ramenés au problème des Cartes géographiques, qui exige seulement, comme on sait, l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre, laquelle coïncide ici avec l'équation des caractéristiques de la proposée.

Suivant que ces caractéristiques seront réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que $B^2 - AC$ sera positif ou négatif, nous saurons donc, par une substitution réelle, ramener l'équation à l'un des deux types suivants

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y} + a\,\frac{\partial u}{\partial X} + b\,\frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + a\,\frac{\partial u}{\partial X} + b\,\frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0.$$

Dans ces équations, les coefficients sont de même nature que ceux de

l'équation (1). En particulier, c ne diffère de F que par un facteur positif qui n'est ni nul ni infini dans toute l'étendue du domaine R' qui correspond à la partie de l'ancien domaine R où $B^2 - AC$ garde un signe constant.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à l'étude de l'équation (5).

Le domaine R' est maintenant celui où les coefficients a, b, c sont finis et continus avec leurs dérivées des deux premiers ordres; nous n'en sortirons plus désormais, et négligerons par suite de le mentionner, quand nous parlerons de l'équation (5).

2. La première question qui se pose est maintenant la suivante :

Une intégrale est-elle déterminée par ses valeurs le long d'un contour s?

Commençons par traiter un cas particulier, en supposant que le coefficient c soit négatif et non nul dans S et sur s. Je dis que dans ce cas il ne pourra y avoir deux intégrales u_1 et u_2 prenant sur s les mêmes valeurs. Il faut donc faire voir que, si une intégrale $u = u_1 - u_2$ s'annule sur s, elle est nécessairement nulle dans S. Or nous allons voir qu'elle ne peut prendre dans S aucune valeur positive.

Si la fonction continue u pouvait prendre dans S des valeurs positives, elle aurait une certaine limite supérieure M, positive, qu'elle atteindrait au moins pour un point x_0, y_0 de S. Donnons alors à y la valeur fixe y_0 et faisons varier x de $x_0 - \varepsilon$ à $x_0 + \varepsilon$.

Entre $x_0 - \varepsilon$ et x_0, la fonction $u(x, y_0)$ est croissante ou constante.

Entre x_0 et $x_0 + \varepsilon$, la même fonction est décroissante ou constante.

Ainsi, dans le premier intervalle, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est positive ou nulle, dans le second elle est négative ou nulle. Elle est donc nulle au point x_0, y_0 et de plus n'est jamais croissante entre $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est au point x_0, y_0 négative ou nulle.

Mêmes raisonnements pour $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

On a donc au point x_0, y_0

$$u > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leqq 0.$$

Le premier membre de (5) serait alors, pour $x = x_0$ et $y = y_0$, la somme de trois quantités dont aucune ne serait positive et dont la troisième au moins ne serait pas nulle, ce qui est impossible.

Il est donc établi qu'aucune intégrale u ne peut avoir dans S un maximum positif, en entendant le mot maximum au sens le plus large, de limite supérieure.

Elle ne peut non plus avoir une limite inférieure négative, comme on le voit en changeant u en $-u$.

Dans tout ceci on n'a pas fait usage des valeurs de u sur s.

Nous avons donc établi les résultats suivants :

Quand dans une aire S le coefficient $c = \frac{F}{A}$ est constamment négatif et non nul, aucune intégrale continue ne peut avoir de maximum positif ni de limite supérieure positive à l'intérieur de S, ni de minimum négatif ou de limite inférieure négative.

Si les valeurs sur le contour sont toutes nulles, l'intégrale sera nulle dans l'intérieur de S.

Si les valeurs sur le contour sont positives ou nulles, la fonction ne deviendra jamais négative et n'aura pas de maximum dans l'aire.

Si les valeurs sur le contour sont négatives ou nulles, la fonction ne sera jamais positive et n'aura pas de minimum.

En tout état de cause, les valeurs positives de la fonction seront inférieures à la plus grande des valeurs positives sur le contour, et les valeurs négatives seront inférieures en valeur absolue à la plus grande valeur négative sur le contour. Ces résultats nous serviront plus tard. Remarquons seulement qu'ils ne sont établis jusqu'à présent que si, dans S, c est négatif et *non nul*.

3. Revenons maintenant au cas général, et posons

$$u = zv,$$

v étant la nouvelle fonction inconnue, et z une fonction que nous laissons arbitraire pour le moment et assujettie seulement à la condition d'admettre des dérivées continues des deux premiers ordres.

L'équation devient alors

$$(6) \qquad z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \left(2\frac{\partial z}{\partial x} + az\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2\frac{\partial z}{\partial y} + bz\right)\frac{\partial u}{\partial y} + v\,F(z) = 0,$$

en appelant $F(z)$ le résultat de la substitution de z à la place de u dans le premier membre de (5).

A l'intégrale u de (5) correspond maintenant une intégrale v de (6) prenant sur le contour les valeurs $\frac{u}{z}$.

Si alors on suppose que la fonction z ait été choisie de telle sorte que dans la région considérée du plan on ait constamment

$$z > 0, \qquad F(z) < 0, \tag{7}$$

les inégalités étant prises au sens précis du mot et excluant l'égalité, alors on retombera sur le cas précédent, et tous les résultats obtenus seront encore applicables au contour S et à la fonction v.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Dans le voisinage de tout point x_0, y_0, on peut tracer un domaine D *assez petit pour que, un contour quelconque s étant tracé dans* D, *l'intégrale de* (5) *soit complètement déterminée par ses valeurs sur s.*

Il suffit, en effet, de montrer que dans le voisinage de tout point on peut déterminer une fonction z satisfaisant aux conditions (7). Or ceci est toujours possible et de bien des manières. Posons

$$z = \sin m(x - \alpha),$$

m et α étant deux constantes indéterminées et $m > 0$; z sera positif si l'on prend $m(x-\alpha)$ entre 0 et π.

On a, d'ailleurs,

$$F(z) = (c - m^2)\sin m(x-\alpha) + ma \cos m(x-\alpha).$$

Pour que $F(z)$ soit négatif, x restant dans l'intervalle déterminé, il suffira de prendre

$$a \cot m(x-\alpha) < \frac{m^2 - c}{m}.$$

Appelons A le module maximum de a. L'inégalité peut s'écrire

$$\frac{a}{A} \cot m(x-\alpha) < \frac{m^2 - c}{mA}.$$

Prenons alors pour m une quantité supérieure à la plus grande valeur positive de c. Le second membre devient une quantité positive et non nulle

dont j'appelle $\cot m\alpha_0$ la limite inférieure. α_0 est certainement compris entre o et $\frac{\pi}{2m}$ et différent de ces deux limites.

D'ailleurs, on a

$$\left|\frac{a}{A}\right| < 1.$$

Donc, si l'on prend $x - \alpha$ entre α_0 et $\frac{\pi}{m} - \alpha_0$, l'inégalité sera certainement vérifiée.

En résumé, si l'on trace une bande parallèle aux y et de largeur égale à $\frac{\pi}{m} - 2\alpha_0$, pour tout contour situé tout entier dans cette bande, il ne pourra y avoir deux intégrales prenant les mêmes valeurs le long du contour.

Il est clair que si nous avions pris

$$z = \sin m(\alpha x + \beta y - \gamma),$$

nous serions arrivé à une bande de direction arbitraire.

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré en toute rigueur, mais les limites que nous obtenons ainsi sont certainement beaucoup trop resserrées et purement théoriques. On trouvera dans chaque cas particulier des limites beaucoup plus larges en appliquant plus habilement la même méthode.

Voici un ou deux exemples :

Soit l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + e^b)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4}u\sin(x - y) = 0,$$

a et b désignant des fonctions continues quelconques.

Prenons $z = e^{-\alpha y}$,

$$F(z) = [\alpha^2 - \alpha(1 + e^b) + \tfrac{1}{4}\sin(x - y)]e^{-\alpha y}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$F(z) = [-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}e^b + \tfrac{1}{4}\sin(x - y)]e^{-\alpha y}.$$

Les conditions (7) sont ici remplies, quels que soient x et y.

Donc, pour un contour quelconque, il ne peut y avoir deux intégrales de

l'équation (8) prenant les mêmes valeurs sur le contour. On remarquera que, dans cet exemple, le coefficient c n'a pas un signe constant.

Prenons encore un exemple où c soit positif,

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{9}$$

k étant une constante, et posons $z = R^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2$,

$$F(z) = -4 + k^2 R^2 - k^2[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2].$$

Si nous prenons $R < \frac{2}{k}$, les conditions (7) sont vérifiées à l'intérieur de tout cercle de rayon R. L'intégrale est donc encore déterminée par ses valeurs sur tout contour dont aucune dimension n'excède $\frac{4}{k}$.

Pour la même équation, l'emploi de la fonction $z = \sin m(\alpha x + \beta y)$ conduirait à une bande de largeur $\frac{\pi}{k}$ et de direction arbitraire.

4. Une dernière application de la méthode nous permettra de démontrer un théorème très général ([1]) dont nous avons déjà vu un cas particulier.

Pour toute aire S *en tous les points de laquelle* c *n'est jamais positif, l'intégrale est déterminée par ses valeurs le long du contour.*

Il suffit ici de prendre

$$z = e^{-\frac{\alpha}{M}e^{Mx}},$$

α et M étant des constantes indéterminées. On a, en effet,

$$F(z) = z(\alpha^2 e^{2Mx} - \alpha M e^{Mx} - a\alpha e^{Mx} + c) = z\left\{\alpha e^{2Mx}[\alpha - (a+M)e^{-Mx}] + c\right\}.$$

Prenons pour M une quantité positive supérieure au module de la plus petite valeur de a. Alors $a + M$ est toujours supérieur à un nombre positif k. D'ailleurs, dans l'aire S considérée, quelle qu'elle soit, pourvu qu'elle soit limitée, on a

$$z > 0, \qquad e^{-Mx} > h > 0.$$

Si donc on choisit pour α un nombre compris entre 0 et hk, le premier

---

[1] Ce théorème est plus général que celui du n° 2, car ici on peut avoir $c \leqq 0$, tandis qu'au n° 2 l'égalité était exclue.

terme du binôme qui multiplie z sera négatif et non nul, le second sera négatif ou nul : donc on aura toujours

$$F(z) < 0,$$

et le théorème est démontré.

Les régions du plan où c ne devient jamais positif présentent ainsi un intérêt particulier et feront plus loin l'objet d'une étude spéciale.

5. Nous n'avons démontré jusqu'ici que des propriétés pour ainsi dire négatives, car nous avons montré que, dans certains cas que nous précisons, il ne peut y avoir deux intégrales prenant des valeurs données sur un contour. Il faut maintenant prouver l'existence de cette unique intégrale [1].

Commençons par le cas d'un contour assez petit pour que le théorème du n° 3 lui soit applicable. Nous supposerons aussi d'abord que ce contour est circulaire.

Écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu. \tag{10}$$

Nous procéderons par approximations successives.

Partons d'une première fonction $u_1 = 0$ que nous substituerons dans le second membre de (10) et intégrons l'équation

$$\Delta u = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 = f(u_1) = 0.$$

Soit u_2 l'intégrale de cette équation prenant sur le contour les valeurs données.

Passons ensuite à l'équation

$$\Delta v_3 = f(u_2),$$

que nous intégrerons en supposant que v_3 s'annule sur le contour ; puis l'on passera à

$$\Delta v_4 = f(v_3).$$

que l'on intégrera dans les mêmes conditions que la précédente.

---

[1] Cf. PICARD, *Journal de Mathématiques*; 1890.

On formera ainsi une suite de fonctions

$$u_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad \ldots,$$

qui, dans le contour, seront continues et admettront des dérivées continues des deux premiers ordres. La première de ces fonctions prend sur le contour les valeurs données, les autres s'annulent sur le contour.

Si donc nous démontrons que la série

$$(11) \qquad u_2 + v_3 + v_4 + \ldots$$

est uniformément convergente et représente une fonction admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, nous aurons bien la solution cherchée. En effet, cette fonction prendra sur le contour les valeurs données, à cause de la convergence uniforme de la série (11). Ce sera, d'ailleurs, une intégrale de l'équation (10). Pour le voir bien nettement, posons

$$u_n = u_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

On aura évidemment

$$(12) \qquad \Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, les séries

$$u_2 + \sum v_p, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum \frac{\partial v_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

sont convergentes, et même absolument et uniformément convergentes, comme on le verra, et ont pour sommes

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le premier membre de (12) tend donc vers Δu, le second membre tend vers $a \dfrac{\partial u}{\partial x} + b \dfrac{\partial u}{\partial y} + cu$, et, par suite, u est bien solution de (10).

Il suffit donc de démontrer la convergence uniforme de toutes ces séries. Cette démonstration n'est pas immédiate. Pour y arriver, nous n'emploierons pas les expressions des u et des v que nous avons trouvées au Chapitre II sous forme d'intégrales doubles, et qui nous conduiraient à des discussions pénibles. Nous aurons recours au développement de ces fonctions en séries

trigonométriques. Mais nous commencerons par deux lemmes qui nous seront utiles.

6. Lemme. — *Si une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles est continue dans un cercle et y admet des dérivées continues des deux premiers ordres, cette fonction est développable dans ce cercle en série*

$$f(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \tag{13}$$

absolument et uniformément convergente.

Les a_m et b_m sont des fonctions continues de r satisfaisant aux relations

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2},$$

h est ici une constante ne dépendant que de la fonction et non du rayon du cercle. On a posé d'ailleurs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Soit, en effet,

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \varphi(r, \theta).$$

Posons

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma)\cos m\gamma\, d\gamma, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma)\sin m\gamma\, d\gamma.$$

Une double intégration par partie donnera

$$a_m = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi} \varphi''_\gamma(r, \gamma)\cos m\gamma\, d\gamma, \qquad b_m = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi} \varphi''_\gamma(r, \gamma)\sin m\gamma\, d\gamma.$$

On aura donc

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2}, \qquad h = 2\max|\varphi''(r, \gamma)|.$$

Il résulte déjà de là que la série (13) est absolument et uniformément convergente. Pour en trouver la somme, considérons la série suivante en ρ et θ, où r entre dans les coefficients à titre de paramètre,

$$\Phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty \rho^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta). \tag{14}$$

On sait que cette série n'est autre chose que le développement de l'inté-

grale de Poisson

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma)\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\gamma-\theta)+\rho^2}\,d\gamma.$$

Quand ρ tend vers l'unité, $\Phi(\rho, \theta)$ tend vers la somme de la série (13), puisque celle-ci est convergente. D'autre part, dans les mêmes conditions, l'intégrale tend vers $\varphi(r, \gamma)$. On a donc bien

$$\varphi(r, \gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

Le second lemme sur lequel nous nous appuierons concerne certaines séries numériques; nous l'énoncerons comme il suit :

Lemme. — *Les sommes des trois séries convergentes*

(15) $$\sum_{q=1}^{q=m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2},$$

(16) $$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2},$$

(17) $$\sum_{q=m+1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2}$$

sont inférieures à $\frac{1}{3}\frac{\theta}{m^2}$, *$\theta$ étant une quantité purement numérique.*

Occupons-nous d'abord de la première, dont le nombre des termes est limité. Un raisonnement géométrique bien connu nous permet d'écrire

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{2}{(m-1)^2} + \int_1^{m-1} \frac{dx}{x^2(m-x)^2},$$

en envisageant l'aire de la courbe $y = \frac{1}{x^2(m-x)^2}$.

L'intégrale qui figure au second membre se calcule aisément et a pour valeur

$$\frac{1}{m^2}\left[\frac{4}{m-1}\,\mathrm{L}(m-1) - \frac{2}{m-1} + 2\right].$$

La quantité entre crochets est visiblement inférieure à une certaine quan-

tité purement numérique, quel que soit m. Il en est de même de la quantité $\frac{m}{m-1}$. On peut donc bien écrire

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{1}{3}\frac{\theta}{m^2}.$$

Pour la seconde somme, on procédera de même.
On écrira d'abord

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} < \frac{1}{(m+1)^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(m+x)^2}$$

et l'on arrivera à la même conclusion.

Enfin la troisième somme se ramène à la deuxième en posant $q = m + q'$. On a donc finalement

$$(18) \qquad \sum_{1}^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2} < \frac{\theta}{m^2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Considérons alors l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

où nous supposons que $f(x, y)$ est développable en série trigonométrique avec des coefficients a_m et b_m dont les modules sont inférieurs à $\frac{h}{m^2}$. Il suffira pour cela que $f(x, y)$ admette des dérivées secondes limitées dans le cercle, mais cette condition n'est pas indispensable, et ne se trouvera même pas réalisée, en général, dans les applications que nous rencontrerons. La seule chose essentielle est la limitation des a_m et b_m en $\frac{h}{m^2}$.

Nous savons déjà qu'il existe une intégrale de cette équation, continue et s'annulant sur le cercle R. Mais nous allons rechercher directement une telle intégrale sous forme trigonométrique ([1]).

([1]) Cf. PICARD, *Journal de l'École Polytechnique,* LXe Cahier. Dans ce Mémoire, il s'agit d'équations à coefficients analytiques.

Écrite en coordonnées polaires, l'équation va devenir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \varphi(r, \theta), \tag{19}$$

et l'on a par hypothèse

$$\varphi(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \qquad |a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2}.$$

Essayons de vérifier l'équation (19) par une série de la forme

$$u = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta). \tag{20}$$

En substituant ce développement supposé convergent dans (19) et identifiant les coefficients de $\cos m\theta$ et de $\sin m\theta$, on trouve que α_m satisfait à la relation

$$\frac{d^2\alpha_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\alpha_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\alpha_m = a_m. \tag{21}$$

On a d'ailleurs une équation analogue pour β_m.

La fonction u doit être continue dans le cercle, et s'annuler pour $r = \mathrm{R}$. Il faut donc qu'il en soit de même pour les α_m [1]. Un calcul élémentaire donne alors, pour l'intégrale α_m de l'équation (21) qui reste finie pour $r = 0$ et qui s'annule pour $r = \mathrm{R}$, la valeur suivante

$$2m\alpha_m = r^m \int_{\mathrm{R}}^r \frac{a_m\,dr}{r^{m-1}} - \frac{1}{r^m}\int_0^r a_m r^{m+1}\,dr + \frac{r^m}{\mathrm{R}^{2m}}\int_0^{\mathrm{R}} a_m r^{m+1}\,dr.$$

Cette expression est, comme les a_m et b_m, une fonction continue de r dans le cercle et sur le cercle.

a_m admet une limite supérieure M égale à $\frac{h}{m^2}$. On a donc

$$2m|\alpha_m| < \frac{2\mathrm{MR}^2}{m-2} + \frac{2\mathrm{MR}^2}{m+2},$$

[1] Théorème de Cantor.

d'où

$$|\alpha_m| < \frac{\lambda_1 h R^2}{m^4},$$

λ_1 désignant une constante purement numérique.

Il résulte déjà de là que la série (20) est convergente et admet des dérivées des deux premiers ordres par rapport à θ, continues elles-mêmes.

Mais nous avons besoin aussi des dérivées en r.

On a d'abord

$$2\frac{d\alpha_m}{dr} = r^{m-1}\int_R^r \frac{a_m\,dr}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m+1}}\int_0^r a_m r^{m+1}\,dr + \frac{r^{m-1}}{R^{2m}}\int_0^R a_m r^{m+1}\,dr;$$

cette expression reste continue pour $r = 0$. Elle donne d'ailleurs

$$2\left|\frac{d\alpha_m}{dr}\right| < \frac{2MR}{m-2} + \frac{2MR}{m+2},$$

$$\left|\frac{d\alpha_m}{dr}\right| < \frac{\lambda_2 h R}{m^3}, \qquad \lambda_2 = \text{constante numérique.}$$

Passons aux dérivées secondes

$$2\frac{d^2\alpha_m}{dr^2} = (m-1)r^{m-2}\int_R^r \frac{a_m\,dr}{r^{m-1}} - (m+1)\frac{1}{r^{m+2}}\int_0^r a_m r^{m+1}\,dr$$
$$+ 2a_m + (m-1)\frac{r^{m-2}}{R^{2m}}\int_0^R a_m r^{m+1}\,dr.$$

Ici encore tous les termes restent finis pour $r = 0$ et l'on a

$$\left|\frac{d^2\alpha_m}{dr^2}\right| < \frac{\lambda_3 h}{m^2}.$$

De ces calculs résultent les résultats suivants :

Tout d'abord la série (20) et toutes celles qu'on en déduit par une ou deux dérivations sont absolument et uniformément convergentes. La série (20) représente donc bien l'intégrale que nous cherchions. De plus, dans le développement trigonométrique de cette intégrale u et de ses dérivées, on a les limites suivantes pour les modules des coefficients de $\cos m\theta$

et de $\sin m\theta$,

$$(22)\quad \begin{cases} \text{Dans } u \dots\dots\dots\dots & \dfrac{\lambda h R^2}{m^4} \\ \text{Dans } \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dots\dots\dots\dots & \dfrac{\lambda h R}{m^3} \\ \text{Dans } \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \dots\dots\dots\dots & \dfrac{\lambda h}{m^2} \end{cases}$$

λ étant purement numérique.

On en déduit sans peine les limites correspondantes pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Il s'agit de développer en série trigonométrique l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}.$$

On a tout d'abord

$$(23)\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta = \cos\theta\left[\frac{1}{2}\frac{d\alpha_0}{dr} + \sum_1^\infty\left(\frac{d\alpha_n}{dr}\cos n\theta + \frac{d\beta_n}{dr}\sin n\theta\right)\right].$$

Or la formule

$$2\cos p\theta\cos q\theta = \cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta$$

et ses analogues montrent que l'on obtiendra dans (23) un terme en $\cos m\theta$ seulement par les termes $\frac{d\alpha_{m-1}}{dr}$ et $\frac{d\alpha_{m+1}}{dr}$. Le coefficient de $\cos m\theta$, dans le développement de $\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta$, aura donc une limite de la forme

$$\frac{\lambda_0\lambda h R}{m^3},$$

λ_0 étant purement numérique.

Le terme $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta$ conduit à la même conclusion.

Les coefficients de $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$, dans $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, ont donc pour limite

$$(24)\qquad \frac{\lambda_0\lambda h R}{m^3}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour montrer que la méthode des approximations successives conduit bien au résultat.

suite affirmer que les coefficients de $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$ ont pour limites

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Dans } v_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{h\mu R}{m^4} \\ \text{Dans } \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \text{ et } \dfrac{\partial v_3}{\partial y} \dots\dots\dots\dots & \dfrac{\lambda_0 h\mu}{m^3} \\ \text{Dans } \dfrac{\partial v_3}{\partial r} \text{ et } \dfrac{\partial v_3}{\partial \theta} \dots\dots\dots\dots & \dfrac{h\mu}{m^3} \\ \text{Dans } \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial r^2},\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial r\,\partial\theta},\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial\theta^2} \dots\dots & \dfrac{h\mu}{m^2 R} \end{array}\right.$$

formules obtenues en remplaçant purement et simplement, dans (22) et (24), la quantité h par $\frac{\lambda_0 hk\theta}{R}$, et posant, pour abréger, $\lambda_0\lambda k\theta = \mu$. μ est une constante numérique.

Mais v_4 se déduit de v_3 comme v_3 se déduit de u_2. Les limites relatives à v_4 se déduiront donc des précédentes en y changeant h en $h\mu R$, c'est-à-dire en multipliant simplement ces limites par μR. Donc enfin les limites relatives à v_n seront

$$\frac{h\mu R}{m^4}(\mu R)^{n-3}, \quad \frac{\lambda_0 h\mu}{m^3}(\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^3}(\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^2 R}(\mu R)^{n-3}.$$

Il en résulte que la série Σw_n, dans laquelle w_n désigne v_n ou l'une quelconque de ses dérivées en r et θ des deux premiers ordres, se présentera sous la forme d'une série double absolument et uniformément convergente, car les différents coefficients de $\cos m\theta$, par exemple, dans Σw_n sont respectivement inférieurs aux termes de la progression géométrique

$$\frac{H}{m^\alpha}\sum_1^\infty (\mu R)^p$$

qui est convergente si $\mu R < 1$. H est une constante indépendante de m, et α est l'un des nombres 2, 3 ou 4.

La série totale converge donc comme $\sum \frac{1}{m^\alpha}$.

D'ailleurs la condition $\mu R < 1$ sera toujours vérifiée si le rayon du cercle est assez petit, puisque μ est une constante absolue.

La série $u_2 + v_3 + v_4 + \dots$ représente donc bien une fonction continue admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. C'est ce que nous voulions démontrer.

9. Avant d'aller plus loin, quelques remarques trouveront ici leur place.

On peut tout d'abord étendre tous les résultats précédents à l'équation complète

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + f, \tag{26}$$

contenant un terme indépendant de u.

En effet, l'intégrale de cette équation qui prend des valeurs données le long d'un contour sera nécessairement unique toutes les fois qu'il en sera de même en supposant $f = 0$. Car, s'il existait deux telles intégrales, leur différence s'annulerait le long du contour et vérifierait l'équation homogène

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Cette différence serait donc identiquement nulle d'après l'hypothèse.

De plus, la méthode des approximations s'applique à l'équation (26) de la manière suivante.

Partons de $u_1 = 0$ et déterminons u_2 par l'équation

$$\Delta u_2 = f$$

avec les valeurs données au contour.

Puis déterminons l'intégrale v_3 de l'équation

$$\Delta v_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$$

qui s'annule sur le contour, et de même v_4, v_5, ...

Tous les raisonnements déjà faits vont s'appliquer à la série des fonctions u_2, v_3, v_4, ... Car u_2 admet des dérivées troisièmes (Chapitre II, n° 5), puisque f admet par hypothèse des dérivées secondes comme a, b, c, et ses coefficients sont donc limités en $\frac{1}{m^3}$ comme dans le numéro précédent. La série

$$u_2 + v_3 + v_4 + \ldots$$

et ses dérivées des deux premiers ordres sont donc encore absolument et uniformément convergentes. C'est d'ailleurs une intégrale de (26), car, en posant encore

$$u_n = u_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n,$$

il vient de nouveau

$$\Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} - f.$$

Il n'y a donc rien à changer aux raisonnements déjà faits.

Les résultats obtenus peuvent encore être étendus dans une autre direction.

Le changement de variables qui correspond à une représentation conforme transforme l'équation proposée en une autre de même espèce, et la nature des coefficients ne sera pas changée si la fonction de transformation a le caractère d'une fonction entière dans toute la région que l'on veut considérer. On saura donc résoudre le problème pour un contour formé d'un seul arc analytique régulier, si ce contour est suffisamment petit, car on sait représenter l'aire en question sur le cercle d'une manière conforme, au moyen d'une fonction qui a le caractère d'une fonction entière dans toute l'aire et sur le contour. Mais on ne pourrait plus le faire si l'aire était limitée par plusieurs arcs de lignes analytiques différentes, car, dans le voisinage des sommets d'un tel polygone, la fonction de transformation perdrait le caractère de fonction entière, et les coefficients de l'équation transformée ne satisferaient plus aux conditions de continuité qui leur étaient imposées dans la démonstration.

Remarquons enfin que la solution, dans le cas d'une aire assez petite, se présente toujours sous la forme d'une somme de deux termes, le premier étant la fonction harmonique qui prend sur le contour les valeurs données, le second étant une fonction continue dans l'aire et tendant vers o sur le contour.

10. Nous allons maintenant revenir, pour ne plus la quitter, à l'équation homogène. Nous avons vu que dans la région T, où c est négatif ou nul, il existe au plus une intégrale continue dans une aire S et prenant sur s des valeurs données. Il s'agit de démontrer l'existence de cette intégrale unique. C'est ce que nous ferons en faisant voir que le procédé alterné de M. Schwarz s'applique à notre équation.

Nous pouvons évidemment supposer *c négatif et non nul,* puisque nous avons vu (n° 4) que le cas où c peut s'annuler se ramène aisément au cas où c ne peut pas s'annuler, au moyen d'un changement de fonction

$$u = v e^{-\frac{\alpha}{M} e^{Mx}}.$$

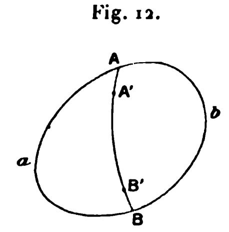
Or, en supposant c négatif et non nul, nous avons établi au n° 2 le résultat suivant qui est fondamental.

A l'intérieur de l'aire S, les valeurs positives de l'intégrale sont toutes *inférieures* à la plus grande valeur positive sur le contour, et les valeurs négatives ont toutes un module inférieur au plus grand module des valeurs négatives sur le contour.

Ceci suffit à faire voir que le procédé alterné est applicable.

Soit, en effet, un contour pour lequel on sache résoudre le problème. Traçons une ligne AB (*fig.* 12) qui ne soit pas tangente au contour et qui

Fig. 12.



le divise en deux parties a et b. Construisons la fonction u qui vérifie l'équation en prenant sur a la valeur 0 et sur b la valeur 1. On sera assuré que, en tout point de AB, u a une valeur positive inférieure à un nombre $q < 1$. C'est le lemme fondamental de Schwarz qui s'étend à notre équation.

En effet, séparons de AB deux petits arcs AA' et BB'.

Sur A'B', u est une fonction continue qui, nous le savons, reste inférieure à l'unité, puisque l'arc A'B' est tout entier intérieur à S. Elle a donc une limite supérieure q_1 qu'elle atteint effectivement et qui est inférieure à 1. Maintenant l'aire S que nous envisageons sera toujours formée, dans les applications que nous ferons de ce lemme, par la superposition d'un certain nombre d'aires élémentaires assez petites pour que, à l'intérieur de chacune de ces aires, la fonction u puisse être mise sous la forme $u_2 + \mathrm{U}$, u_2 étant la fonction harmonique prenant sur le contour de l'aire élémentaire les mêmes valeurs que u et U tendant vers 0 sur le contour de l'aire. La portion de s, voisine de A, peut donc être rattachée à une semblable aire élémentaire, et, par suite, A' peut être pris assez voisin de A pour que, sur tout l'arc AA', la fonction u_2 soit inférieure à un nombre q_2 plus petit que 1, et que U soit aussi petit que nous voudrons. Sur AA' on a donc

$$u < q_2 < 1,$$

et de même sur BB'

$$u < q_3 < 1.$$

Si donc q désigne la plus grande des trois quantités q_1, q_2, q_3, on aura, sur tout l'arc AB,

$$u < q < 1.$$

De là résulte que, si une intégrale U prend sur a la valeur o et sur b des valeurs dont le module est inférieur ou égal à H, les valeurs de U sur AB auront un module inférieur à qH.

Soit, en effet, u l'intégrale égale à o sur a et à 1 sur b, et considérons la fonction

$$U + Hu$$

qui est nulle sur a et positive ou nulle sur b. Elle sera certainement positive ou nulle sur AB. Mais on peut l'écrire sous la forme suivante

$$U + qH + H(u - q).$$

Sur AB on a, d'après le lemme, $u - q < 0$. Il faut donc que l'on ait

$$U + qH > 0.$$

Ainsi sur AB on a $U > -qH$ et la considération de la fonction $U - Hu$ conduirait de même à la conclusion

$$U < qH \quad \text{sur} \quad AB.$$

11. Nous pouvons maintenant montrer que, si l'on sait résoudre le problème pour deux aires empiétant l'une sur l'autre et dont les contours ne sont pas tangents, on saura aussi le résoudre pour l'aire formée par la superposition des deux aires données, en entendant bien par là que la portion commune aux deux aires n'est censée recouvrir le plan qu'une seule fois.

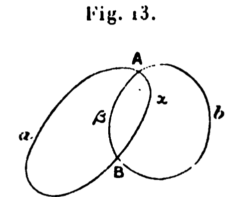
Ainsi, dans la *fig.* 13, les deux aires données sont AaBα, AβBb, et l'aire formée par leur superposition est AaBb.

Appelons S_1 la première aire, S_2 la deuxième, Σ l'aire commune AβBα. Par hypothèse, on sait résoudre le problème pour S_1 et S_2 avec des valeurs arbitraires sur les contours, et l'on veut résoudre le problème pour l'aire totale en donnant sur son contour une suite continue de valeurs U.

Construisons l'intégrale u_1 qui prend sur a les valeurs données, et sur α

une suite de valeurs que nous choisirons arbitrairement, mais formant cependant avec les valeurs données sur a une suite continue. Cette intégrale est

Fig. 13.



définie dans l'aire S_1 et prend sur β des valeurs déterminées. Pour plus de netteté, appelons U_1 les valeurs de U sur a et U_2 les valeurs de U sur b. Alors les valeurs de u_1 sur β forment évidemment un prolongement continu de U_2.

Construisons alors la fonction v_1 qui vérifie l'équation dans S_2 prenant sur b les valeurs U_2 et sur β les mêmes valeurs que u_1. Cette fonction prendra sur α des valeurs déterminées qui seront un prolongement continu de U_1.

Formons alors de nouveau l'intégrale u_2 relative à l'aire S_1 qui prend sur a les valeurs U_1 et sur α les mêmes valeurs que v_1. Cette fonction prendra sur β des valeurs déterminées, etc.

Nous formons ainsi deux suites infinies de fonctions que j'écris dans le Tableau suivant :

$$(27) \qquad \begin{array}{ccccccccccc} u_1 & & u_2 & & u_3 & & \dots u_{n-1} & & u_n & & u_{n+1}\dots \\ | & / & | & / & | & / & | & / & | & / & | \\ v_1 & & v_2 & & v_3 & & \dots v_{n-1} & & v_n & & v_{n+1}\dots \end{array} \quad |\,\beta \;/\,\alpha.$$

Les fonctions u_i existent dans l'aire S_1 et y vérifient l'équation proposée. Elles prennent toutes sur a les valeurs U_1. Les fonctions v_i existent dans S_2 et y vérifient l'équation. Elles prennent toutes sur b les valeurs U_2.

De plus, d'après la manière dont nous avons opéré, il est clair que dans le Tableau précédent les fonctions jointes par un trait vertical ont la même valeur sur β et celles qui sont jointes par un trait oblique, la même valeur sur α.

Il faut montrer que :

Les fonctions u_i tendent vers une limite u qui vérifie l'équation dans S_1 et prend sur a les valeurs données;

Les fonctions v_i tendent vers une limite v qui vérifie l'équation proposée dans S_2 et prend sur b les valeurs données;

Enfin, que les fonctions u et v coïncident dans la portion commune aux deux aires.

Nous aurons ainsi montré l'existence d'une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres, donnée à la vérité par deux développements analytiques, distincts dans les régions S_1 et S_2, mais qui coïncident dans la région commune à S_1 et S_2; cette fonction vérifie l'équation dans toute l'aire $S_1 + S_2$ et prend les valeurs données sur le contour total. Le problème sera ainsi complètement résolu.

Dans ce but, calculons le module de $u_{n+1} - u_n$.

On a, d'après le Tableau ci-dessus, et en employant une notation qui se comprend d'elle-même,

$$(u_{n+1} - u_n)_\alpha = (v_n - v_{n-1})_\alpha, \qquad (u_{n+1} - u_n)_a = 0;$$

mais

$$(v_n - v_{n-1})_b = 0, \qquad (v_n - v_{n-1})_\beta = (u_n - u_{n-1})_\beta.$$

D'après l'un des lemmes, à chacune des lignes α et β est attaché un nombre q_1 ou q_2 inférieur à l'unité. Appelons q le plus grand de ces deux nombres. On aura donc

$$\begin{aligned} |v_n - v_{n-1}|_\alpha &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ |u_{n+1} - u_n|_\alpha &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta. \end{aligned}$$

Et de là se concluent les deux relations fondamentales

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} |u_{n+1} - u_n|_M &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ |u_{n+1} - u_n|_\beta &< q^2 \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta. \end{aligned} \right.$$

M désignant un point quelconque de la première aire.

Nous avons donc la série suivante d'inégalités

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n|_M &< q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta &< q^2 \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_\beta, \\ \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_\beta &< q^2 \max. |u_{n-2} - u_{n-3}|_\beta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \max. |u_3 - u_2|_\beta &< q^2 \max. |u_2 - u_1|_\beta, \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$|u_{n+1} - u_n|_M < q^{2n-3} \max. |u_2 - u_1|.$$

Or q est plus petit que l'unité. La série dont le terme général serait $(u_{n+1} - u_n)_M$ est donc absolument et uniformément convergente. La somme des n premiers termes, qui est $u_n - u_1$, tend donc vers une limite. u_n a donc une limite u, qui représente une fonction continue dans l'aire S_1. Comme on a constamment $(u_n - u_{n-1})_a = 0$, la fonction u prend sur a les valeurs données. Je dis maintenant que u admet des dérivées continues des deux premiers ordres et vérifie l'équation proposée. Pour le faire voir, construisons la solution continue u' de l'équation qui existe dans S_1 et qui prend sur le contour de S_1 les mêmes valeurs que u. (Ceci est possible, puisque par hypothèse on sait résoudre le problème pour S_1.) Nous allons montrer que u et u' coïncident.

On peut, en effet, prendre n assez grand pour que u_n diffère aussi peu que l'on veut de sa limite u. A tout nombre ε arbitraire correspond donc un nombre n tel que l'on ait

$$|u - u_n|_M < \varepsilon,$$

quel que soit M dans S_1 et même sur le contour de S_1.

On a donc en tout point du contour

$$|u' - u_n| < \varepsilon,$$

puisque u et u' coïncident sur le contour.

Mais alors on a en tout point intérieur

$$|u' - u_n|_M < \varepsilon.$$

Puisque u' et u_n sont solutions de l'équation. Il vient donc

$$|u' - u|_M < 2\varepsilon.$$

On a donc rigoureusement $u = u'$ dans toute l'aire S_1, puisque, en un point M quelconque, u et u' ont des valeurs fixes et que ε est arbitraire.

On démontrera de même que v_n tend vers une limite v qui vérifie l'équation dans l'aire S_2.

Maintenant u et v coïncident dans Σ. Car la différence $u - v$ est définie dans Σ et y vérifie l'équation. Cette différence est d'ailleurs nulle sur α et sur β, car on a, d'après le Tableau (27),

$$(u_n - v_n)_\beta = 0, \qquad (u_{n+1} - v_n)_\alpha = 0;$$

on a donc

$$|u - v|_\beta = |(u - u_n) - (v - v_n) + (u_n - v_n)|_\beta < |u - u_n|_\beta + |v - v_n|_\beta + |u_n - v_n|_\beta,$$

et, par suite,

$$|u - v|_\beta < \varepsilon$$

en prenant n assez grand.

On a donc, de nouveau, rigoureusement

$$(u - v)_\beta = 0$$

et de même

$$(u - v)_\alpha = 0.$$

$u - v$ est donc nulle sur le contour de Σ et y vérifie l'équation.

Σ est d'ailleurs dans la région T où c est négatif. On a donc identiquement

$$u = v \quad \text{dans } \Sigma.$$

On pourra ainsi résoudre le problème pour des aires de plus en plus compliquées et étendues, et qui différeront aussi peu que l'on voudra d'une aire arbitrairement donnée. Pour pouvoir résoudre entièrement le problème relativement à une aire donnée d'avance, il manque encore un intermédiaire, par exemple la solution pour le cas d'un petit secteur ou d'un petit segment circulaire, ou d'un triangle, en un mot d'une aire présentant un angle aigu arbitraire. La méthode de M. Schwarz s'appliquerait alors sans modification. C'est là une question qui appelle encore de nouvelles recherches.

12. Avant de quitter ce sujet, nous ne pouvons nous dispenser de mentionner une importante propriété de l'équation linéaire dans le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques de x et y. Toute intégrale de l'équation est alors elle-même une fonction analytique, dans la région, du moins, où les caractéristiques sont imaginaires ([1]). Il suffit, évidemment, de démontrer la chose pour l'équation réduite

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

puisque l'on peut toujours ramener l'équation à cette forme (sous l'hypo-

([1]) Picard, *Journal de l'École Polytechnique*, LXe Cahier.

thèse que les caractéristiques sont imaginaires) au moyen d'un changement de variables effectué par des fonctions analytiques.

Pour démontrer ce théorème, il y a peu de chose à ajouter aux développements donnés au n° 7.

Nous disons qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles est analytique et régulière dans une région, lorsque, dans le voisinage d'un point quelconque x_0, y_0 de cette région, la fonction est développable en série procédant suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$ et $y - y_0$, la série restant convergente quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Il résulte de cette définition que si dans ce développement on pose

$$x - x_0 = r\cos\theta, \qquad y - y_0 = r\sin\theta,$$

et qu'on exprime les puissances des lignes trigonométriques en fonctions linéaires des sinus et cosinus des arcs multiples, le groupe des termes homogènes en $x - x_0$ et $y - y_0$ de degré ν va devenir une expression de la forme $r^\nu P_\nu$, P_ν étant une somme linéaire de sinus et cosinus des arcs

$$\nu\theta, \quad (\nu - 2)\theta, \quad (\nu - 4)\theta, \quad \ldots,$$

et la série restera convergente si dans P_ν on prend chaque terme avec sa valeur absolue ([1]). Les coefficients de θ sous les signes *sin* et *cos* dans P_ν sont les entiers positifs inférieurs ou égaux à ν et de même parité que ν. Cela résulte immédiatement des expressions connues de $\cos^\nu\theta$ et $\sin^\nu\theta$ en fonction linéaire trigonométrique, et des formules qui transforment en somme un produit de deux lignes trigonométriques.

La série ainsi obtenue étant absolument convergente par hypothèse, nous pouvons y grouper les termes comme nous le voulons. Si donc nous groupons tous les termes en $\cos\nu\theta$ par exemple, le coefficient de $\cos\nu\theta$ sera une série ordonnée suivant les puissances croissantes de r, commençant par un terme en r^ν, tous les termes ayant, d'ailleurs, la parité de ν; cette série reste évidemment convergente si l'on y remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Réciproquement, si une série trigonométrique absolument convergente

---

([1]) Ce point résulte de l'expression que l'on peut obtenir pour les coefficients de P_ν en calculant P_ν par un développement de Fourier appliqué simplement aux termes homogènes de degré ν.

admet pour coefficients de $\cos\nu\theta$ et de $\sin\nu\theta$ des séries en r présentant ce caractère, la série totale représentera une fonction analytique. Il suffit pour le voir de remonter la chaîne des déductions précédentes.

Reportons-nous alors au n° 7. Les a_m et b_m sont des séries en r comme celles que nous venons de rencontrer. Il en est donc de même pour α_m et β_m d'après les expressions de ces quantités par des intégrales définies.

Si, de là, nous passons au n° 8, nous voyons donc que les différentes quantités u_2, v_3, v_4, ... sont des fonctions analytiques. Mais, dans le cas actuel, il ne sera plus nécessaire, pour montrer que la série

$$u_2 + v_3 + v_4 + \ldots \tag{29}$$

résout le problème, de supposer que la série des valeurs au contour est une fonction admettant des dérivées troisièmes. Cette hypothèse avait pour but d'obtenir, pour certains coefficients du développement, une limite de la forme $\frac{h}{m^4}$, ce qui nous était indispensable pour démontrer rigoureusement que la série (29) admet des dérivées secondes.

Il va nous suffire de supposer l'existence de dérivées *secondes* seulement pour la fonction donnée sur le contour, et ce point est important pour la suite.

En effet, dans cette hypothèse, on voit immédiatement que, dans toutes les formules du Tableau (25), les exposants de m au dénominateur doivent simplement être diminués d'une unité, les formules restant, d'ailleurs, inaltérées. La série (29) converge donc maintenant comme $\sum \frac{1}{m^3}$ au lieu de converger comme $\sum \frac{1}{m^4}$. Elle est encore absolument et uniformément convergente; seulement maintenant le coefficient de $\cos m\theta$ dans cette série est une série en r obtenue par le groupement de tous les coefficients de $\cos m\theta$ dans ses différents termes. C'est donc une série ordonnée suivant les puissances croissantes et positives de r, commençant par un terme en r^m, ne contenant que des termes de même parité que m, et absolument convergente. La série (29) est donc une fonction analytique de x et de y; elle admet, par suite, des dérivées de tous les ordres, et, en particulier, du second ordre. Elle représente donc bien l'intégrale cherchée.

Il résulte immédiatement de là que toute intégrale est une fonction analytique. Soit, en effet, une intégrale quelconque u_1, continue dans le voisi-

nage de x_0, y_0. Traçons de ce point comme centre un cercle de rayon suffisamment petit. L'intégrale considérée u_1 prend sur la circonférence de ce cercle des valeurs déterminées formant une fonction U *qui admet des dérivées secondes,* puisque l'intégrale considérée admet des dérivées secondes en x et y dans toute région où elle existe. Si alors nous formons, par la méthode du n° 8, l'intégrale continue v_1 qui se réduit à U sur la circonférence, cette intégrale v_1 sera, comme on vient de le voir, une fonction analytique. Mais les intégrales u_1 et v_1 coïncident nécessairement, si le rayon du cercle est assez petit, puisqu'elles prennent les mêmes valeurs sur la circonférence. L'intégrale u_1 est donc analytique.

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$,

PAR M. A. LAFAY,

Lieutenant d'Artillerie au 11e bataillon de forteresse, à Lyon.

1. Dans cette Note, nous allons étudier la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ à l'aide des formules générales suivantes qui peuvent être utilisées dans bien des cas analogues.

De la relation évidente

$$(0) \qquad 0 = \int_r^q f(x)\,dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f(n+1-u)\,du,$$

on déduit, en intégrant par parties l'intégrale placée sous le signe $\sum$ et en utilisant les propriétés bien connues des polynômes bernoulliens, $\varphi_\alpha(u)$,

$$(1) \qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \int_r^q f(x)\,dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f'(n+1-u)\,du,$$

$$(2) \qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x)\,dx - \frac{1}{1.2} f(x)\right]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f''(n+1-u)\varphi_1(u)\,du,$$

. . . . ,

$$(2p) \qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x)\,dx - \frac{1}{1.2} f(x) + \frac{1}{2} B_1 f'(x) + \ldots + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} f^{2p-3}(x)\right]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^{2p}(n+1-u)\varphi_{2p-1}(u)\,du.$$

Ces formules s'obtiennent également de la manière suivante : Dans la

formule d'Euler

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1.2}\Delta f(a) + hf(a) - \frac{1}{2}B_1 h^2 \Delta f'(a) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}h^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)}\Delta f^{2p-3}(a)$$
$$+ h^{2p}\int_0^h f^{2p}(a+h-u)\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

faisons $a = n$, $h = 1$; puis effectuons sur l'équation ainsi obtenue l'opération $\sum\limits_r^{q-1}$ par rapport à n, en isolant dans le premier membre le terme $\sum\limits_r^{q-1} f(n)$, nous aurons la formule $(2p)$.

2. L'application de ces formules nécessite l'étude des conditions d'absolue convergence des séries

$$R_\alpha = \sum_r^{q-1}\int_0^1 f^\alpha(n+1-u)\varphi_{\alpha-1}(u)\,du \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p),$$

lorsque q devient infini; pour cela nous nous servons de la transformation suivante qui simplifie le travail, mais donne naturellement des conditions moins larges.

On a, en désignant par M le maximum de $|\varphi_{\alpha-1}(u)|$ entre o et 1 et en appliquant la relation (o),

$$|R_\alpha| < \sum_r^{q-1}\left|\int_0^1 f^\alpha(n+1-u)\varphi_{\alpha-1}(u)\,du\right|$$
$$< M\sum_r^{q-1}\int_0^1 |f^\alpha(n+1-u)|\,du < M\int_r^q |f^\alpha(x)|\,dx,$$

relations qui permettent d'écrire

$$\text{(A)} \qquad R_\alpha = e^{\omega\sqrt{-1}}\varphi_{\alpha-1}(\theta)\int_0^q |f^\alpha(x)|\,dx \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

et montrent qu'il suffit pour que R_α soit absolument convergente que l'intégrale $\int_r^{q=\infty} |f^\alpha(x)|\, dx$ soit finie et déterminée.

3. Considérons maintenant la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans laquelle $s = a + bi$; il vient en appliquant (1),

$$(1') \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} - R_1.$$

Supposons $a > 0$, la relation (A) montre que la série complémentaire R_1 est absolument convergente; car, $\left|\left(\frac{1}{x^s}\right)'\right| = \left|\frac{-h}{x^{1+s}}\right| = \frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{x^{1+a}}$ reste fini dans le champ d'intégration (1 à ∞) et est infiniment petit d'ordre supérieur à 1 pour $x = \infty$.

L'étude de $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est ainsi ramenée à celle de l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$, c'est-à-dire de

$$\lim_{q=\infty} \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s}\right],$$

et l'on trouve alors facilement que la série considérée est

1° Absolument convergente si $a > 1$;

2° Finie, mais indéterminée comme l'expression $\lim_{x=\infty} \frac{1}{b}(\sin b \,\ell x + i \cos b \,\ell x)$, si $a = 1$ avec $b \gtrless 0$;

3° Divergente si $a = 1$ avec $b = 0$, ou $a < 1$ avec b quelconque,

et cette dernière conséquence subsiste pour $a \leqq 0$, car dans cette hypothèse (1') montre que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est la somme algébrique de deux quantités dont les ordres d'infinitude diffèrent et ne peuvent mutuellement se réduire.

4. D'après ce qui précède, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, considérée comme fonction de s, n'est analytiquement bien définie que pour des valeurs de s dont l'affixe se trouve

dans la région du plan déterminée par la condition $a > 1$; mais l'équation

$$\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} = \left(\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}\right) - R_1$$

nous fournit directement, par la considération de $\lim_{q=\infty} \left[\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \frac{q^{1-s}}{1-s}\right]$, une fonction de s qui, absolument confondue avec $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans la région $(a > 1)$, conserve des propriétés analytiques bien définies dans la région plus étendue $(a > 0)$, car dans toute cette région la série R_1 reste absolument convergente.

Enfin l'application de la formule $(2p)$ nous conduit à la fonction

$$\zeta(s) = \lim_{q=\infty} \left\{ \sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} q^{-s} - \frac{1}{2} B_1 s q^{-s-1} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} s(s+1)\ldots(s+2p-4) q^{-s-2p+3} \right] \right\},$$

dont le domaine analytique s'étend indéfiniment pour des valeurs de p, de plus en plus grandes.

Cette fonction $\zeta(s)$ qui se trouve ainsi mise sous la forme

$$(2p') \qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_1 s - \frac{B_2}{1.2.3.4} s(s+1)(s+2) + \ldots + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} s(s+1)\ldots(s+2p-4) - s(s+1)\ldots(s+2p-1) \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_{2p-1}(u)}{(n+1-u)^{s+2p}}$$

n'est autre chose que la fonction considérée par Riemann.

5. De la formule $(2p')$ se déduisent facilement quelques propriétés de $\zeta(s)$,

1° $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ ou $(s-1)\zeta(s)$ sont des fonctions holomorphes;

2° $\zeta(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ (RIEMANN),

car.

$$\zeta(-2n) = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{B_1}{1.2}2n + \ldots$$
$$+ (-1)^i \frac{B_i}{1.2\ldots 2i} 2n(2n-1)\ldots(2n-2i+2) + \ldots + (-1)^n B_n,$$

et le second membre est égal à

$$-(2n!)\varphi_{2n}(x) = -[1^{2n} + 2^{2n} + \ldots + (x-1)^{2n}] \quad \text{pour} \quad x = 1;$$

3° $$\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (\text{M. Stieltjes}),$$

car, comme plus haut, on a

$$\zeta(-2n+1) = -(2n-1)!\,\varphi_{2n-1}(1) + (-1)^n \frac{B_n}{2n}.$$

4° Enfin, de la formule particulière

(1″) $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s\sum_1^\infty \int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u\,du$$

déduite de (1), nous tirons, en remplaçant l'intégrale qui y figure par le développement

$$\int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u\,du = \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+1-u)^2} + \frac{1-s}{1}\int_0^1 \frac{\mathfrak{L}(n+1-u)u\,du}{(n+1-u)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(1-s)^i}{1.2\ldots i}\int_0^1 \frac{\mathfrak{L}^i(n+1-u)u\,du}{(n+1-u)^2} + \ldots$$

et en ordonnant suivant les puissances de $(s-1)$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + M_0 + M_1(s-1) + \ldots + M_i(s-1)^i + \ldots,$$

dans laquelle

$$M_i = \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i}\sum_1^\infty \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}^i(n+1-u) - i\mathfrak{L}^{i-1}(n+1-u)}{(n+1-u)^2} u\,du,$$

et l'application de cette même formule (1), dans laquelle on fait $f(x) = \frac{\mathfrak{L}^i x}{x}$,

donne pour M l'expression indiquée par M. Jensen (*Comptes rendus*, t. CIV)

$$M = [illegible] \left[\sum [illegible] \right]$$

$$= [illegible] \sum [illegible] \, u \, du.$$

SUR QUELQUES

INÉGALITÉS DE LA LONGITUDE DE LA LUNE,

PAR M. H. ANDOYER,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Amené par des considérations théoriques à étudier les séries qui représentent les coefficients des principales inégalités de la longitude de la Lune, je n'ai pas tardé à reconnaître que les résultats que je trouvais cessaient de concorder avec ceux donnés par Delaunay, à partir du huitième ordre inclusivement. Les coefficients sur lesquels porte le désaccord résultent donc uniquement, dans l'œuvre de Delaunay, du Chapitre X de sa Théorie du mouvement de la Lune, intitulé : *Recherches supplémentaires sur la longitude de la Lune;* c'est dans ce Chapitre seul, en effet, que sont calculés les termes dont l'ordre est supérieur au septième.

En conséquence, je me propose simplement, dans ce Mémoire, de publier les résultats que j'ai obtenus en calculant, avec la même approximation que Delaunay, les coefficients des inégalités de la longitude de la Lune qui ne dépendent que du rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, ainsi que de la première puissance de l'excentricité de la Lune; je donne aussi, dans les mêmes conditions, la partie du mouvement du périgée lunaire qui ne dépend que du rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune.

Ces résultats ont été obtenus concordants par l'emploi de deux méthodes absolument distinctes, ce qui donne toute la garantie désirable pour leur exactitude. J'exposerai successivement ces deux méthodes, dont la première m'est propre, et dont la seconde est empruntée, avec des modifications de nulle importance, au beau Mémoire : *Researches in the lunar theory,* publié par M. G.-W. Hill, au tome I de l'*American Journal of Mathematics.*

Je dois, d'ailleurs, adresser ici mes vifs remerciements à M. Saint-Blancat, de l'Observatoire de Toulouse, qui a bien voulu m'aider à déterminer exactement l'un des nombres les plus pénibles à obtenir.

2. Le problème que je me propose de résoudre peut être énoncé ainsi :

Étudier le mouvement de la Lune sous l'action de la Terre et du Soleil seuls, en supposant en outre : 1° que l'on néglige les dimensions de ces trois corps; 2° que la masse M *de la Lune est absolument négligeable, et que celle de la Terre,* M_0, *est négligeable en comparaison de celle du Soleil,* M'; *3° que le Soleil décrit, d'un mouvement uniforme, une circonférence autour de la Terre; 4° que le mouvement de la Lune s'effectue dans le plan de cette circonférence; 5° enfin, que l'on néglige le rapport des dimensions des orbites de la Lune et du Soleil.*

Dans ces conditions, soit choisi comme plan du mouvement le plan des xy, les axes de coordonnées ayant des directions fixes et l'origine O étant la Terre. Soient r et v le rayon vecteur et la longitude de la Lune; a' le rayon vecteur constant du Soleil et $N' = n't + v'_0$ sa longitude, n' et v'_0 étant des constantes, t représentant le temps; soit enfin f le coefficient d'attraction. La fonction des forces dont dépend le mouvement étudié est alors, en posant $H = v - N'$,

$$f\mathrm{M}\left\{\frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}_0}{r} + \mathrm{M}'\left[(a'^2 + r^2 - 2a'r\cos H)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r\cos H}{a'^2}\right]\right\}.$$

Or $f\mathrm{M}' = n'^2 a'^3$ en vertu des hypothèses faites; j'appelle n le moyen mouvement de la Lune, et je détermine a par la condition

$$f(\mathrm{M} + \mathrm{M}_0) = n^2 a^3;$$

l'expression de la fonction des forces deviendra, en ne conservant que les termes qui contiennent les coordonnées de la Lune et qui sont indépendants du rapport $\frac{r}{a'}$,

$$\mathrm{M}\left[\frac{n^2 a^3}{r} + \frac{n'^2 r^2}{4}(1 + 3\cos 2H)\right].$$

Les équations du mouvement sont donc, en employant la forme de La-

grange, et représentant les dérivées à l'aide d'accents,

$$r'' - rv'^2 + \frac{n^2a^3}{r^2} - \frac{n'^2 r}{2}(1 + 3\cos 2H) = 0,$$

$$2r'v' + r(v'' + \tfrac{3}{2}n'^2 \sin 2H) = 0.$$

Je vais éliminer r entre ces deux équations, et j'obtiendrai ainsi l'équation différentielle qui détermine la seule longitude.

Différentiant la seconde équation, il vient

$$2v'r'' + r'(3v'' + \tfrac{3}{2}n'^2 \sin 2H) + r[v''' + 3n'^2(v' - n')\cos 2H] = 0.$$

Entre ces trois équations, j'élimine r, r', r'' en considérant $\frac{n^2a^3}{r^3}$ comme une constante; on obtient aisément

$$4v'^2 \frac{n^2a^3}{r^3} = 2v'v''' - 3v''^2 + 4v'^4 + 2n'^2v'^2 - \tfrac{9}{8}n'^4$$
$$- 6n'^2 v'' \sin 2H + 6n'^2 v'(2v' - n')\cos 2H + \tfrac{9}{8}n'^4 \cos 4H.$$

Je prends les dérivées logarithmiques, et je remarque que, en vertu de la seconde des équations du mouvement, on a

$$-\frac{r'}{r} = \frac{v'' + \frac{3}{2}n'^2 \sin 2H}{2v'};$$

r se trouve alors complètement éliminé, et l'on obtient finalement l'équation suivante ne contenant plus que la longitude et ses dérivées

$$\begin{aligned}
0 = {} & v'^2 v^{\mathrm{IV}} + v'^4 v'' - \tfrac{11}{2} v' v'' v''' - \tfrac{3}{2} n'^2 v'^2 v'' + \tfrac{21}{4} v''^3 + \tfrac{171}{32} n'^4 v'' \\
& + n'^2 \sin 2H(-\tfrac{33}{2} v'^4 + 18 n' v'^3 - \tfrac{33}{4} n'^2 v'^2 - \tfrac{21}{4} v' v''' + \tfrac{111}{8} v''^2 + \tfrac{243}{128} n'^4) \\
& + n'^2 \cos 2H(-15 v'^2 v'' + \tfrac{27}{2} n' v' v'') \\
& + n'^4 \sin 4H(-9 v'^2 + \tfrac{45}{8} n' v') \\
& + n'^4 \cos 4H(-\tfrac{171}{32} v'') \\
& + n'^6 \sin 6H(-\tfrac{81}{128}).
\end{aligned}$$

3. Conformément à la méthode générale que j'ai exposée dans mon Mémoire *Sur les formules générales de la Mécanique céleste*, publié au t. IV des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, je vais intégrer cette équation par la méthode des coefficients indéterminés de la façon suivante.

Soit $N = nt + v_0$, v_0 étant une constante arbitraire, n le moyen mouvement de la Lune qui joue aussi le rôle de constante arbitraire d'intégration;

je fais $K = N - N'$, et soit G un argument, déterminé par la suite des opérations mêmes, de la forme $gt + \varpi$, ϖ étant une constante arbitraire, g un coefficient convenablement déterminé. On pourra alors poser $v = N + \lambda$, λ étant une série de la forme suivante

$$\lambda = \Sigma\lambda_{p,q}\sin(pK + qG),$$

où je supposerai que p et q peuvent prendre toutes les valeurs entières possibles (les valeurs de p étant d'ailleurs nécessairement paires, puisque les multiples pairs de H figurent seuls dans l'équation), et où l'on aura, en outre, pour la symétrie et la commodité des calculs,

$$\lambda_{-p,-q} = -\lambda_{p,q}.$$

Ces coefficients $\lambda_{p,q}$ seront fournis par l'application de la méthode des coefficients indéterminés, ainsi que je vais le faire voir. Ils dépendront d'ailleurs d'une constante arbitraire nouvelle (correspondant à l'excentricité), et que je prendrai égale au coefficient $\lambda_{0,1}$ de $\sin G$; appelant ε cette constante, on aura donc $\lambda_{0,1} = \varepsilon$. Alors chacun des autres coefficients $\lambda_{p,q}$ est de la forme

$$\lambda_{p,q} = \varepsilon^{|q|}(\lambda_{p,q}^{(0)} + \lambda_{p,q}^{(2)}\varepsilon^2 + \lambda_{p,q}^{(4)}\varepsilon^4 + \ldots),$$

les $\lambda_{p,q}^{(i)}$ étant eux-mêmes des séries ordonnées suivant les puissances du rapport m des moyens mouvements du Soleil et de la Lune.

De même, la quantité g est de la forme

$$g = n(g_0 + g_2\varepsilon^2 + g_4\varepsilon^4 + \ldots),$$

les g_i étant des séries analogues aux $\lambda_{p,q}^{(i)}$.

J'ajoute d'ailleurs qu'en disant que les formules qui sont ainsi fournies vérifient les équations du mouvement, j'entends simplement que le calcul peut être poussé assez loin pour que, après substitution de ces formules dans les équations, les résidus soient d'un ordre aussi élevé qu'on voudra par rapport aux quantités m et ε, considérées comme petites du premier ordre.

Comme je l'ai dit plus haut, je me propose simplement ici de calculer avec la même approximation que Delaunay g_0, les $\lambda_{p,0}^{(0)}$ et les $\lambda_{p,\pm 1}^{(0)}$.

4. L'équation dont dépend λ est aisée à former. Remplaçant v par $N + \lambda$ et, par suite, H par $K + \lambda$ dans l'équation qui donne v, il viendra, en dé-

veloppant le tout par rapport aux puissances de λ et de ses dérivées,

$$\begin{aligned}
0 = {} & n^2\lambda^{\text{IV}} + \lambda''\left(n^4 - \tfrac{3}{2}n^2n'^2 + \tfrac{171}{32}n'^4\right) \\
& + 2n\lambda'\lambda^{\text{IV}} - \tfrac{11}{2}n\lambda''\lambda''' + \lambda'\lambda''(4n^3 - 3nn'^2) \\
& + \lambda'^2\lambda^{\text{IV}} - \tfrac{11}{2}\lambda'\lambda''\lambda''' + \tfrac{21}{4}\lambda''^3 + \lambda'^2\lambda''\left(6n^2 - \tfrac{3}{2}n'^2\right) + 4n\lambda'^3\lambda'' + \lambda'^4\lambda'' \\
& + n'^6 \sin 6K\left[-\tfrac{81}{128} + \tfrac{729}{64}\lambda^2 + \ldots\ldots\ldots\right] \\
& + n'^6 \cos 6K\left[-\tfrac{243}{64}\lambda + \tfrac{729}{32}\lambda^3 + \ldots\ldots\ldots\right] \\
& + n'^4 \sin 4K\Big[-9n^2 + \tfrac{45}{8}nn' + \lambda'\left(-18n + \tfrac{45}{8}n'\right) \\
& \qquad + \tfrac{171}{8}\lambda\lambda'' - 9\lambda'^2 + \lambda^2(72n^2 - 45nn') + \lambda^2\lambda'(144n - 45n') \\
& \qquad - 57\lambda^3\lambda'' + 72\lambda^2\lambda'^2 + \lambda^4(-96n^2 + 60nn') + \ldots\ldots\ldots\Big] \\
& + n'^4 \cos 4K\Big[-\tfrac{171}{32}\lambda'' + \lambda\left(-36n^2 + \tfrac{45}{2}nn'\right) + \lambda\lambda'\left(-72n + \tfrac{45}{2}n'\right) \\
& \qquad + \tfrac{171}{4}\lambda^2\lambda'' - 36\lambda\lambda'^2 + \lambda^3(96n^2 - 60nn') \\
& \qquad + \lambda^3\lambda'(192n - 60n') + \ldots\ldots\ldots\Big] \\
& + n'^2 \sin 2K\Big[-\tfrac{33}{2}n^4 + 18n^3n' - \tfrac{33}{4}n^2n'^2 + \tfrac{243}{128}n'^4 \\
& \qquad - \tfrac{21}{4}n\lambda''' + \lambda'\left(-66n^3 + 54n^2n' - \tfrac{33}{2}nn'^2\right) \\
& \qquad - \tfrac{21}{4}\lambda'\lambda''' + \tfrac{111}{8}\lambda''^2 + \lambda\lambda''(30n^2 - 27nn') \\
& \qquad + \lambda'^2\left(-99n^2 + 54nn' - \tfrac{33}{4}n'^2\right) \\
& \qquad + \lambda^2\left(33n^4 - 36n^3n' + \tfrac{33}{2}n^2n'^2 - \tfrac{243}{64}n'^4\right) \\
& \qquad + \tfrac{21}{2}n\lambda^2\lambda''' + \lambda\lambda'\lambda''(60n - 27n') + \lambda'^3(-66n + 18n') \\
& \qquad + \lambda^2\lambda'(132n^3 - 108n^2n' + 33nn'^2) \\
& \qquad + \tfrac{21}{2}\lambda^2\lambda'\lambda''' - \tfrac{111}{4}\lambda^2\lambda''^2 + 30\lambda\lambda'^2\lambda'' + \lambda^3\lambda''(-20n^2 + 18nn') \\
& \qquad - \tfrac{33}{2}\lambda'^4 + \lambda^2\lambda'^2\left(198n^2 - 108nn' + \tfrac{33}{2}n'^2\right) \\
& \qquad + \lambda^4\left(-11n^4 + 12n^3n' - \tfrac{11}{2}n^2n'^2 + \tfrac{81}{64}n'^4\right) \\
& \qquad - \tfrac{7}{2}n\lambda^4\lambda''' + \lambda^3\lambda'\lambda''(-40n + 18n') + \lambda^2\lambda'^3(132n - 36n') \\
& \qquad + \lambda^4\lambda'(-44n^3 + 36n^2n' - 11nn'^2) + \ldots\ldots\ldots\Big] \\
& + n'^2 \cos 2K\Big[\lambda''\left(-15n^2 + \tfrac{27}{2}nn'\right) \\
& \qquad + \lambda\left(-33n^4 + 36n^3n' - \tfrac{33}{2}n^2n'^2 + \tfrac{243}{64}n'^4\right) \\
& \qquad - \tfrac{21}{2}n\lambda\lambda''' + \lambda'\lambda''\left(-30n + \tfrac{27}{2}n'\right) \\
& \qquad + \lambda\lambda'(-132n^3 + 108n^2n' - 33nn'^2) \\
& \qquad - \tfrac{21}{2}\lambda\lambda'\lambda''' + \tfrac{111}{4}\lambda\lambda''^2 - 15\lambda'^2\lambda'' + \lambda^2\lambda''(30n^2 - 27nn') \\
& \qquad + \lambda\lambda'^2\left(-198n^2 + 108nn' - \tfrac{33}{2}n'^2\right) \\
& \qquad + \lambda^3\left(22n^4 - 24n^3n' + 11n^2n'^2 - \tfrac{81}{32}n'^4\right) \\
& \qquad + 7n\lambda^3\lambda''' + \lambda^2\lambda'\lambda''(60n - 27n') + \lambda\lambda'^3(-132n + 36n' \\
& \qquad + \lambda^3\lambda'(88n^3 - 72n^2n' + 22nn'^2) \\
& \qquad + 7\lambda^3\lambda'\lambda''' - \tfrac{37}{2}\lambda^3\lambda''^2 + 30\lambda^2\lambda'^2\lambda'' + \lambda^4\lambda''(-10n^2 + 9nn') \\
& \qquad - 33\lambda\lambda'^4 + \lambda^3\lambda'^2(132n^2 - 72nn' + 11n'^2) \\
& \qquad + \lambda^5\left(-\tfrac{22}{5}n^4 + \tfrac{24}{5}n^3n' - \tfrac{11}{5}n^2n'^2 + \tfrac{81}{160}n'^4\right) + \ldots\ldots\ldots\Big]
\end{aligned}$$

cède, on obtient immédiatement les formules qui sont écrites ci-dessous pour déterminer les quantités que j'ai en vue avec l'approximation que j'ai déjà indiquée et qui est celle de Delaunay.

Dans ces formules, les termes utiles sont seuls écrits; j'indique en même temps jusqu'à quel ordre *inclusivement* elles permettent de calculer les inconnues sans qu'il soit nécessaire de les compléter; d'ailleurs, dans les résultats, je n'ai pas toujours atteint cet ordre, puisque je m'en tiens à l'approximation de Delaunay.

On a ainsi, en posant $\mu = 1 - m$ pour simplifier l'écriture,

$\lambda_{2,0}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \; & \lambda_{2,0}^{(0)}[16\mu^4 + \mu^2(-4 + 6m^2 - \tfrac{171}{8}m^4)] \\
& + m^2[-\tfrac{33}{4} + 9m - \tfrac{33}{8}m^2 + \tfrac{243}{256}m^4] \\
& + \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[1600\mu^5 + \mu^3(-64 + 48m^2)] \\
& + (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[-1296\mu^6 + \mu^4(-96 + 24m^2)] \\
& + m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[-\tfrac{171}{16}\mu^2 + \mu(-18 + \tfrac{45}{8}m) + 18 - \tfrac{45}{4}m] \\
& + m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-168\mu^3 + \mu^2(120 - 108m) \\
& \qquad + \mu(132 - 108m + 33m^2) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4] \\
& + m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[375\mu^4 + \mu^3(162 - 54m) + \mu^2(-378 + 270m - \tfrac{33}{2}m^2) \\
& \qquad + \mu(-132 + 108m - 33m^2) + \tfrac{99}{2} - 54m + \tfrac{99}{4}m^2 - \tfrac{729}{128}m^4] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda_{4,0}^{(0)}$ jusqu'au onzième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \; & \lambda_{4,0}^{(0)}[256\mu^4 + \mu^2(-16 + 24m^2 - \tfrac{171}{2}m^4)] \\
& + m^4[-\tfrac{9}{2} + \tfrac{45}{16}m] \\
& + (\lambda_{2,0}^{(0)})^2[-112\mu^5 + \mu^3(-32 + 24m^2)] \\
& + \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{6,0}^{(0)}[8160\mu^5 + \mu^3(-192 + 144m^2)] \\
& + (\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-8832\mu^6 + \mu^4(-768 + 192m^2)] \\
& + (\lambda_{2,0}^{(0)})^4[-256\mu^5] \\
& + m^6\lambda_{2,0}^{(0)}[\tfrac{243}{128}] \\
& + m^4(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[-\tfrac{243}{2}\mu^2 + 72 - 45m] \\
& - m^2\lambda_{2,0}^{(0)}[21\mu^3 + \mu^2(30 - 27m) \\
& \qquad + \mu(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4] \\
& - m^2\lambda_{6,0}^{(0)}[-567\mu^3 + \mu^2(270 - 243m) \\
& \qquad + \mu(198 - 162m + \tfrac{99}{2}m^2) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4] \\
& + m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[1776\mu^4 + \mu^3(1044 - 432m) - \mu^2(-600 + 540m) \\
& \qquad + \mu(-264 + 216m - 66m^2) - 66 - 72m + 33m^2 - \tfrac{243}{32}m^4]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[852\mu^4 + \mu^3(-1092 + 360m) + \mu^2(-912 + 540m - 66m^2) \\
&\qquad + \mu(264 - 216m + 66m^2) + 22 - 24m + 11m^2 - \tfrac{81}{32}m^4] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$\lambda_{6,0}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \lambda_{6,0}^{(0)}[1296\mu^4 + \mu^2(-36 + 54m^2 - \tfrac{1539}{8}m^4)] \\
&+ m^6[-\tfrac{81}{256}] \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[-960\mu^5 + \mu^3(-192 + 144m^2)] \\
&+ (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[48\mu^6 + \mu^4(-96 + 24m^2)] \\
&+ m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[\tfrac{171}{16}\mu^2 + \mu(-18 + \tfrac{45}{8}m) - 18 + \tfrac{45}{4}m)] \\
&+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[168\mu^3 + \mu^2(120 - 108m) \\
&\qquad + \mu(-132 + 108m - 33m^2) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4] \\
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[-69\mu^4 + \mu^3(162 - 54m) + \mu^2(-138 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) \\
&\qquad + \mu(-132 + 108m - 33m^2) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

g_0 jusqu'au dixième ordre (en faisant $V_p = G$ et remarquant que $\lambda_{0,1}^{(0)} = 1$) :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & g_0^4 + g_0^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4) \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}[-4\mu(2\mu - g_0)^4 - 22\mu^2(2\mu - g_0)^3 \\
&\qquad + 44\mu^3(2\mu - g_0)^2 + 32\mu^4(2\mu - g_0) \\
&\qquad + \mu(2\mu - g_0)^2(8 - 6m^2) + \mu^2(2\mu - g_0)(-16 + 12m^2)] \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)}[4\mu(2\mu + g_0)^4 + 22\mu^2(2\mu + g_0)^3 \\
&\qquad - 44\mu^3(2\mu + g_0)^2 - 32\mu^4(2\mu + g_0) \\
&\qquad + \mu(2\mu + g_0)^2(-8 + 6m^2) + \mu^2(2\mu + g_0)(16 - 12m^2)] \\
&+ \lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{4,-1}^{(0)}[-8\mu(4\mu - g_0)^4 - 88\mu^2(4\mu - g_0)^3 \\
&\qquad + 352\mu^3(4\mu - g_0)^2 + 512\mu^4(4\mu - g_0) \\
&\qquad + \mu(4\mu - g_0)^2(16 - 12m^2) + \mu^2(4\mu - g_0)(-64 + 48m^2)] \\
&+ \lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{4,1}^{(0)}[8\mu(4\mu + g_0)^4 + 88\mu^2(4\mu + g_0)^3 \\
&\qquad - 352\mu^3(4\mu + g_0)^2 - 512\mu^4(4\mu + g_0) \\
&\qquad + \mu(4\mu + g_0)^2(-16 + 12m^2) + \mu^2(4\mu + g_0)(64 - 48m^2)] \\
&+ (\lambda_{2,0}^{(0)})^2[8\mu^2 g_0^4 - 680\mu^4 g_0^2 + \mu^2 g_0^2(-48 + 12m^2)] \\
&+ (\lambda_{4,0}^{(0)})^2[32\mu^2 g_0^4 - 10880\mu^4 g_0^2 + \mu^2 g_0^2(-192 + 48m^2)] \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}[-16\mu^2(2\mu - g_0)^4 - 88\mu^3(2\mu - g_0)^3 \\
&\qquad + 2896\mu^4(2\mu - g_0)^2 + 1600\mu^5(2\mu - g_0) \\
&\qquad + \mu^2(2\mu - g_0)^2(96 - 24m^2) + \mu^3(2\mu - g_0)(-192 + 48m^2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)}[16\mu^2(2\mu+g_0)^4+88\mu^3(2\mu+g_0)^3\\
&\qquad -2896\mu^4(2\mu+g_0)^2-1600\mu^5(2\mu+g_0)\\
&\qquad +\mu^2(2\mu+g_0)^2(-96+24m^2)+\mu^3(2\mu+g_0)(192-48m^2)]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,-1}^{(0)}[-4\mu^2(4\mu-g_0)^4-44\mu^3(4\mu-g_0)^3\\
&\qquad -164\mu^4(4\mu-g_0)^2-112\mu^5(4\mu-g_0)\\
&\qquad +\mu^2(4\mu-g_0)^2(24-6m^2)+\mu^3(4\mu-g_0)(-96+24m^2)]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,1}^{(0)}[4\mu^2(4\mu+g_0)^4+44\mu^3(4\mu+g_0)^3\\
&\qquad +164\mu^4(4\mu+g_0)^2+112\mu^5(4\mu+g_0)\\
&\qquad +\mu^2(4\mu+g_0)^2(-24+6m^2)+\mu^3(4\mu+g_0)(96-24m^2)]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-384\mu^3g_0^2]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^3\lambda_{2,-1}^{(0)}[96\mu^3(2\mu-g_0)^2-192\mu^4(2\mu-g_0)]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^3\lambda_{2,1}^{(0)}[-96\mu^3(2\mu+g_0)^2+192\mu^4(2\mu+g_0)]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^4[-96\mu^4g_0^2]\\
&+m^4\lambda_{4,-1}^{(0)}[-\tfrac{171}{64}(4\mu-g_0)^2+(4\mu-g_0)(-9+\tfrac{45}{16}m)+18-\tfrac{45}{4}m]\\
&+m^4\lambda_{4,1}^{(0)}[\tfrac{171}{64}(4\mu+g_0)^2+(4\mu+g_0)(9-\tfrac{45}{16}m)-18+\tfrac{45}{4}m]\\
&+m^4\lambda_{4,0}^{(0)}[-\tfrac{171}{8}g_0^2-342\mu^2+\mu(-288+90m)+144-90m]\\
&+m^4\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}[\tfrac{171}{16}(2\mu-g_0)^2-18\mu(2\mu-g_0)+\tfrac{171}{4}\mu^2\\
&\qquad +(2\mu-g_0)(36-\tfrac{45}{4}m)+\mu(72-\tfrac{45}{2}m)-72+45m]\\
&+m^4\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)}[-\tfrac{171}{16}(2\mu+g_0)^2+18\mu(2\mu+g_0)-\tfrac{171}{4}\mu^2\\
&\qquad +(2\mu+g_0)(-36+\tfrac{45}{4}m)+\mu(-72+\tfrac{45}{2}m)+72-45m]\\
&+m^4(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[\tfrac{171}{4}g_0^2+198\mu^2+\mu(576-180m)-288+180m]\\
&+m^2\lambda_{2,-1}^{(0)}[\tfrac{21}{8}(2\mu-g_0)^3+(2\mu-g_0)^2(-\tfrac{15}{2}+\tfrac{27}{4}m)\\
&\qquad +(2\mu-g_0)(-33+27m-\tfrac{33}{4}m^2)+\tfrac{33}{2}-18m+\tfrac{33}{4}m^2-\tfrac{243}{128}m^4]\\
&+m^2\lambda_{2,1}^{(0)}[-\tfrac{21}{8}(2\mu+g_0)^3+(2\mu+g_0)^2(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m)\\
&\qquad +(2\mu+g_0)(33-27m+\tfrac{33}{4}m^2)-\tfrac{33}{2}+18m-\tfrac{33}{4}m^2+\tfrac{243}{128}m^4]\\
&+m^2\lambda_{2,0}^{(0)}[111\mu^2g_0^2+\mu g_0^2(60-27m)+84\mu^3\\
&\qquad +g_0^2(-30+27m)+\mu^2(-120+108m)\\
&\qquad +\mu(-264+216m-66m^2)+66-72m+33m^2-\tfrac{243}{32}m^4]\\
&+m^2\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}[-\tfrac{21}{2}\mu(2\mu-g_0)^3-222\mu^2(2\mu-g_0)^2-168\mu^3(2\mu-g_0)\\
&\qquad +\tfrac{21}{4}(2\mu-g_0)^3+\mu(2\mu-g_0)^2(-60+27m)\\
&\qquad +\mu^2(2\mu-g_0)(240-108m)-336\mu^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + (2\mu - g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu(2\mu - g_0)(396 - 216m + 33m^2) + \mu^2(240 - 216m) \\
& + (2\mu - g_0)(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(264 - 216m + 66m^2) \\
& - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4] \\
+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)} & [\tfrac{21}{2}\mu(2\mu + g_0)^3 + 222\mu^2(2\mu + g_0)^2 + 168\mu^3(2\mu + g_0) \\
& - \tfrac{21}{4}(2\mu + g_0)^3 + \mu(2\mu + g_0)^2(60 - 27m) \\
& + \mu^2(2\mu + g_0)(-240 + 108m) + 336\mu^3 \\
& + (2\mu + g_0)^2(-15 + \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu(2\mu + g_0)(-396 + 216m - 33m^2) + \mu^2(-240 + 216m) \\
& + (2\mu + g_0)(66 - 54m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
& + 33 - 36m + \tfrac{33}{2}m^2 - \tfrac{243}{64}m^4] \\
+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,-1}^{(0)} & [\tfrac{21}{4}\mu(4\mu - g_0)^3 + \tfrac{111}{2}\mu^2(4\mu - g_0)^2 + 21\mu^3(4\mu - g_0) \\
& + \tfrac{21}{4}(4\mu - g_0)^3 + \mu(4\mu - g_0)^2(-30 + \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu^2(4\mu - g_0)(60 - 27m) - 42\mu^3 \\
& + (4\mu - g_0)^2(-15 + \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu(4\mu - g_0)(-198 + 108m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu^2(-60 + 54m) \\
& + (4\mu - g_0)(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(132 - 108m + 33m^2) \\
& + 33 - 36m + \tfrac{33}{2}m^2 - \tfrac{243}{64}m^4] \\
+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,1}^{(0)} & [-\tfrac{21}{4}\mu(4\mu + g_0)^3 - \tfrac{111}{2}\mu^2(4\mu + g_0)^2 - 21\mu^3(4\mu + g_0) \\
& - \tfrac{21}{4}(4\mu + g_0)^3 + \mu(4\mu + g_0)^2(30 - \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu^2(4\mu + g_0)(-60 + 27m) + 42\mu^3 \\
& + (4\mu + g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu(4\mu + g_0)(198 - 108m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu^2(60 - 54m) \\
& + (4\mu + g_0)(66 - 54m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-132 + 108m - 33m^2) \\
& - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4] \\
+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)} & [1350\mu^2 g_0^2 + 5232\mu^4 + \mu g_0^2(120 - 54m) + \mu^3(216 + 432m) \\
& + g_0^2(-60 + 54m) + \mu^2(-4368 + 2808m - 264m^2) \\
& + \mu(-528 + 432m - 132m^2) + 132 - 144m + 66m^2 - \tfrac{243}{16}m^4] \\
+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{2,-1}^{(0)} & [\tfrac{21}{2}\mu(2\mu - g_0)^3 - 201\mu^2(2\mu - g_0)^2 + 162\mu^3(2\mu - g_0) - 474\mu^4 \\
& - \tfrac{63}{4}(2\mu - g_0)^3 + \mu(2\mu - g_0)^2(60 - 27m) \\
& + \mu^2(2\mu - g_0)(-756 + 270m) + \mu^3(324 - 108m) \\
& + (2\mu - g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu(2\mu - g_0)(-396 + 216m - 33m^2) \\
& + \mu^2(1308 - 756m + 99m^2) \\
& + (2\mu - g_0)(198 - 162m + \tfrac{99}{2}m^2) + \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
& - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4]
\end{aligned}
$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$+\,m^6 (\gamma^{(4)}_{2,4})^2 \left[\tfrac{171}{6} g_4^2 + 198\mu^2 + \mu(576 - 180m) - 288 + 180m\right]$$

$$+\,m^7 \gamma^{(4)}_{2,1} \left[\tfrac{21}{8}(2\mu - g_0)^3 + (2\mu - g_0)^2\left(-\tfrac{15}{2} + \tfrac{27}{4}m\right)\right.$$
$$\left. + (2\mu - g_0)\left(-33 + 27m - \tfrac{33}{4}m^2\right) + \tfrac{33}{2} - 18m + \tfrac{33}{4}m^2 - \tfrac{243}{128}m^4\right]$$

$$+\,m^7 \gamma^{(4)}_{2,1} \left[\tfrac{21}{8}(2\mu + g_0)^3 + (2\mu + g_0)^2\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{27}{4}m\right)\right.$$
$$\left. + (2\mu + g_0)\left(33 - 27m + \tfrac{33}{4}m^2\right) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4\right]$$

$$+\,m^8 \lambda^{(0)}_{2,0} \left[111\mu^2 g_0^2 + \mu g_0^2(60 - 27m) + 84\mu^3\right.$$
$$+ g_0^2(-30 + 27m) + \mu^2(-120 + 108m)$$
$$\left. + \mu(-264 + 216m - 66m^2) + 66 - 72m + 33m^2 - \tfrac{243}{32}m^4\right]$$

$$+\,m^8 \lambda^{(0)}_{4,0} \gamma^{(0)}_{2,1} \left[\tfrac{21}{2}\mu(2\mu - g_0)^3 - 222\mu^2(2\mu - g_0)^2 - 168\mu^3(2\mu - g_0)\right.$$
$$+ \tfrac{21}{4}(2\mu - g_0)^3 + \mu(2\mu - g_0)^2(-60 + 27m)$$
$$+ \mu^2(2\mu - g_0)(240 - 108m) - 336\mu^3$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (2\mu - g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu(2\mu - g_0)(396 - 216m + 33m^2) + \mu^2(240 - 216m) \\
&\quad + (2\mu - g_0)(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(264 - 216m + 66m^2) \\
&\quad - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)}[\tfrac{21}{2}\mu(2\mu + g_0)^3 + 222\mu^2(2\mu + g_0)^2 + 168\mu^3(2\mu + g_0) \\
&\quad - \tfrac{21}{4}(2\mu + g_0)^3 + \mu(2\mu + g_0)^2(60 - 27m) \\
&\quad + \mu^2(2\mu + g_0)(-240 + 108m) + 336\mu^3 \\
&\quad + (2\mu + g_0)^2(-15 + \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu(2\mu + g_0)(-396 + 216m - 33m^2) + \mu^2(-240 + 216m) \\
&\quad + (2\mu + g_0)(66 - 54m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
&\quad + 33 - 36m + \tfrac{33}{2}m^2 - \tfrac{243}{64}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,-1}^{(0)}[\tfrac{21}{4}\mu(4\mu - g_0)^3 + \tfrac{111}{2}\mu^2(4\mu - g_0)^2 + 21\mu^3(4\mu - g_0) \\
&\quad + \tfrac{21}{4}(4\mu - g_0)^3 + \mu(4\mu - g_0)^2(-30 + \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu^2(4\mu - g_0)(60 - 27m) - 42\mu^3 \\
&\quad + (4\mu - g_0)^2(-15 + \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu(4\mu - g_0)(-198 + 108m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu^2(-60 + 54m) \\
&\quad + (4\mu - g_0)(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(132 - 108m + 33m^2) \\
&\quad + 33 - 36m + \tfrac{33}{2}m^2 - \tfrac{243}{64}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,1}^{(0)}[-\tfrac{21}{4}\mu(4\mu + g_0)^3 - \tfrac{111}{2}\mu^2(4\mu + g_0)^2 - 21\mu^3(4\mu + g_0) \\
&\quad - \tfrac{21}{4}(4\mu + g_0)^3 + \mu(4\mu + g_0)^2(30 - \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu^2(4\mu + g_0)(-60 + 27m) + 42\mu^3 \\
&\quad + (4\mu + g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu(4\mu + g_0)(198 - 108m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu^2(60 - 54m) \\
&\quad + (4\mu + g_0)(66 - 54m + \tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-132 + 108m - 33m^2) \\
&\quad - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[1350\mu^2 g_0^2 + 5232\mu^4 + \mu g_0^2(120 - 54m) + \mu^3(216 + 432m) \\
&\quad + g_0^2(-60 + 54m) + \mu^2(-4368 + 2808m - 264m^2) \\
&\quad + \mu(-528 + 432m - 132m^2) + 132 - 144m + 66m^2 - \tfrac{243}{16}m^4] \\
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{2,-1}^{(0)}[\tfrac{21}{2}\mu(2\mu - g_0)^3 - 201\mu^2(2\mu - g_0)^2 + 162\mu^3(2\mu - g_0) - 474\mu^4 \\
&\quad - \tfrac{63}{4}(2\mu - g_0)^3 + \mu(2\mu - g_0)^2(60 - 27m) \\
&\quad + \mu^2(2\mu - g_0)(-756 + 270m) + \mu^3(324 - 108m) \\
&\quad + (2\mu - g_0)^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
&\quad + \mu(2\mu - g_0)(-396 + 216m - 33m^2) \\
&\quad + \mu^2(1308 - 756m + 99m^2) \\
&\quad + (2\mu - g_0)(198 - 162m + \tfrac{99}{2}m^2) + \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
&\quad - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4]
\end{aligned}
$$

$$+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{4,-1}^{(0)}\Big[\tfrac{21}{2}\mu(4\mu-g_0)^3 + 222\mu^2(4\mu-g_0)^2 + 168\mu^3(4\mu-g_0)$$
$$-\tfrac{21}{4}(4\mu-g_0)^3 + \mu(4\mu-g_0)^2(60-27m)$$
$$+\mu^2(4\mu-g_0)(-240+108m) + 336\mu^3$$
$$+(4\mu-g_0)^2(-15+\tfrac{27}{2}m)$$
$$+\mu(4\mu-g_0)(-396+216m-33m^2) + \mu^2(-240+216m)$$
$$+(4\mu-g_0)(66-54m+\tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-264+216m-66m^2)$$
$$+33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4\Big]$$

$$+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{6,-1}^{(0)}\Big[-\tfrac{21}{4}\mu(6\mu-g_0)^3 - \tfrac{111}{2}\mu^2(6\mu-g_0)^2 - 21\mu^3(6\mu-g_0)$$
$$-\tfrac{21}{4}(6\mu-g_0)^3 + \mu(6\mu-g_0)^2(30-\tfrac{27}{2}m)$$
$$+\mu^2(6\mu-g_0)(-60+27m) + 42\mu^3$$
$$+(6\mu-g_0)^2(15-\tfrac{27}{2}m)$$
$$+\mu(6\mu-g_0)(198-108m+\tfrac{33}{2}m^2) + \mu^2(60-54m)$$
$$+(6\mu-g_0)(66-54m+\tfrac{33}{2}m^2) + \mu(-132+108m-33m^2)$$
$$-33+36m-\tfrac{33}{2}m^2+\tfrac{243}{64}m^4\Big]$$

$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\Big[\tfrac{21}{2}\mu g_0^3 - 201\mu^2 g_0^2 + 162\mu^3 g_0 - 474\mu^4$$
$$-\tfrac{63}{4}g_0^3 + \mu g_0^2(60-27m)$$
$$+\mu^2 g_0(-756+270m) + \mu^3(324-108m)$$
$$+g_0^2(15-\tfrac{27}{2}m)$$
$$+\mu g_0(-396+216m-33m^2) + \mu^2(1308-756m+99m^2)$$
$$+g_0(198-162m+\tfrac{99}{2}m^2) + \mu(-264+216m-66m^2)$$
$$-33+36m-\tfrac{33}{2}m^2+\tfrac{243}{64}m^4\Big]$$

$$+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}\Big[1350\mu^2(2\mu-g_0)^2 + 5232\mu^4$$
$$+\mu(2\mu-g_0)^2(120-54m) + \mu^3(216+432m)$$
$$+(2\mu-g_0)^2(-60+54m) + \mu^2(-4368+2808m-264m^2)$$
$$+\mu(-528+432m-132m^2) + 132-144m+66m^2-\tfrac{243}{16}m^4\Big]$$

$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,-1}^{(0)}\Big[-\tfrac{21}{2}\mu(4\mu-g_0)^3 + 201\mu^2(4\mu-g_0)^2 - 162\mu^3(4\mu-g_0) + 474\mu^4$$
$$+\tfrac{63}{4}(4\mu-g_0)^3 + \mu(4\mu-g_0)^2(-60+27m)$$
$$+\mu^2(4\mu-g_0)(756-270m) + \mu^3(-324+108m)$$
$$+(4\mu-g_0)^2(-15+\tfrac{27}{2}m)$$
$$+\mu(4\mu-g_0)(396-216m+33m^2)$$
$$+\mu^2(-1308+756m-99m^2)$$
$$+(4\mu-g_0)(-198+162m-\tfrac{99}{2}m^2) + \mu(264-216m+66m^2)$$
$$+33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4\Big]$$

$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^3\lambda_{2,-1}^{(0)}\Big[-786\mu^2(2\mu-g_0)^2 - 3480\mu^4$$
$$+\mu(2\mu-g_0)^2(-120+54m) + \mu^3(-4296+1296m)$$
$$+(2\mu-g_0)^2(60-54m) + \mu^2(2304-1512m+132m^2)$$
$$+\mu(528-432m+132m^2) - 132+144m-66m^2+\tfrac{243}{16}m^4\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\lambda^{(0)}_{2,1}$ jusqu'au huitième ordre :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \lambda^{(0)}_{2,1}[(2\mu+g_0)^4+(2\mu+g_0)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
& +\lambda^{(0)}_{2,0}[4\mu g_0^4-22\mu^2 g_0^3-44\mu^3 g_0^2+32\mu^4 g_0 \\
& \qquad +\mu g_0^2(-8+6m^2)+\mu^2 g_0(-16+12m^2)] \\
& +\lambda^{(0)}_{4,0}\lambda^{(0)}_{2,-1}[-8\mu(2\mu-g_0)^4-88\mu^2(2\mu-g_0)^3 \\
& \qquad +352\mu^3(2\mu-g_0)^2+512\mu^4(2\mu-g_0) \\
& \qquad +\mu(2\mu-g_0)^2(16-12m^2)+\mu^2(2\mu-g_0)(-64+48m^2)] \\
& +\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,1}[4\mu(4\mu+g_0)^4+22\mu^2(4\mu+g_0)^3 \\
& \qquad -44\mu^3(4\mu+g_0)^2-32\mu^4(4\mu+g_0) \\
& \qquad +\mu(4\mu+g_0)^2(-8+6m^2)+\mu^2(4\mu+g_0)(16-12m^2)] \\
& +\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,0}[16\mu^2 g_0^4-88\mu^3 g_0^3-2896\mu^4 g_0^2+1600\mu^5 g_0 \\
& \qquad +\mu^2 g_0^2(-96+24m^2)+\mu^3 g_0(-192+48m^2)] \\
& +(\lambda^{(0)}_{2,0})^2\lambda^{(0)}_{2,-1}[-4\mu^2(2\mu-g_0)^4-44\mu^3(2\mu-g_0)^3 \\
& \qquad -164\mu^4(2\mu-g_0)^2-112\mu^5(2\mu-g_0) \\
& \qquad +\mu^2(2\mu-g_0)^2(24-6m^2)+\mu^3(2\mu-g_0)(-96+24m^2)] \\
& +(\lambda^{(0)}_{2,0})^2\lambda^{(0)}_{2,1}[8\mu^2(2\mu+g_0)^4-680\mu^4(2\mu+g_0)^2+\mu^2(2\mu+g_0)^2(-48+12m^2)] \\
& +(\lambda^{(0)}_{2,0})^3[-96\mu^3 g_0^2-192\mu^4 g_0] \\
& +m^4\lambda^{(0)}_{2,-1}[-\tfrac{171}{64}(2\mu-g_0)^2+(2\mu-g_0)(-9+\tfrac{45}{16}m)+18-\tfrac{45}{4}m] \\
& +m^4\lambda^{(0)}_{2,0}[-\tfrac{171}{16}g_0^2-18\mu g_0-\tfrac{171}{4}\mu^2 \\
& \qquad +g_0(36-\tfrac{45}{4}m)+\mu(-72+\tfrac{45}{2}m)+72-45m] \\
& +m^2[\tfrac{21}{8}g_0^3+g_0^2(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m) \\
& \qquad +g_0(-33+27m-\tfrac{33}{4}m^2)-\tfrac{33}{2}+18m-\tfrac{33}{4}m^2+\tfrac{243}{128}m^4] \\
& +m^2\lambda^{(0)}_{4,1}[-\tfrac{21}{8}(4\mu+g_0)^3+(4\mu+g_0)^2(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m) \\
& \qquad +(4\mu+g_0)(33-27m+\tfrac{33}{4}m^2)-\tfrac{33}{2}+18m-\tfrac{33}{4}m^2+\tfrac{243}{128}m^4] \\
& +m^2\lambda^{(0)}_{4,0}[-\tfrac{21}{2}\mu g_0^3+222\mu^2 g_0^2-168\mu^3 g_0 \\
& \qquad +\tfrac{21}{4}g_0^3+\mu g_0^2(60-27m)+\mu^2 g_0(240-108m)+336\mu^3 \\
& \qquad +g_0^2(-15+\tfrac{27}{2}m)+\mu g_0(396-216m+33m^2)+\mu^2(-240+216m) \\
& \qquad +g_0(-66+54m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu(-264+216m-66m^2) \\
& \qquad +33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4] \\
& +m^2\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{2,-1}[\tfrac{21}{4}\mu(2\mu-g_0)^3+\tfrac{111}{2}\mu^2(2\mu-g_0)^2+21\mu^3(2\mu-g_0) \\
& \qquad +\tfrac{21}{4}(2\mu-g_0)^3+\mu(2\mu-g_0)^2(-30+\tfrac{27}{2}m) \\
& \qquad +\mu^2(2\mu-g_0)(60-27m)-42\mu^3 \\
& \qquad +(2\mu-g_0)^2(-15+\tfrac{27}{2}m) \\
& \qquad +\mu(2\mu-g_0)(-198+108m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu^2(-60+54m) \\
& \qquad +(2\mu-g_0)(-66+54m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu(132-108m+33m^2) \\
& \qquad +33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4)] \\
& +m^2\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{2,1}[111\mu^2(2\mu+g_0)^2+\mu(2\mu+g_0)^2(60-27m)+84\mu^3 \\
& \qquad +(2\mu+g_0)^2(-30+27m)+\mu^2(-120+108m) \\
& \qquad +\mu(-264+216m-66m^2)+66-72m+33m^2-\tfrac{243}{32}m^4]
\end{aligned}
$$

$$+ m^2 (\lambda_{2,0}^{(0)})^2 [\tfrac{21}{2} \mu g_0^3 - 201 \mu^2 g_0^2 - 162 \mu^3 g_0 - 474 \mu^4$$
$$- \tfrac{21}{4} g_0^3 + \mu g_0^2 (-60 + 27 m)$$
$$+ \mu^2 g_0 (-756 - 270 m) - \mu^3 (-324 - 108 m)$$
$$+ g_0^2 (-15 + \tfrac{27}{2} m)$$
$$+ \mu g_0 (-396 + 216 m - 33 m^2) + \mu^2 (-1308 + 756 m - 99 m^2)$$
$$+ g_0 (198 - 162 m + \tfrac{99}{2} m^2) + \mu (264 - 216 m + 66 m^2)$$
$$+ 33 - 36 m + \tfrac{33}{2} m^2 - \tfrac{243}{64} m^4]$$

. . . .

$\lambda_{4,1}^{(0)}$, jusqu'au septième ordre :

$$0 = \lambda_{4,1}^{(0)} [(4\mu - g_0)^4 + (4\mu - g_0)^2 (-1 + \tfrac{3}{2} m^2 - \tfrac{171}{32} m^4)]$$
$$+ \lambda_{4,0}^{(0)} [-8 \mu g_0^4 - 88 \mu^2 g_0^3 + 352 \mu^3 g_0^2 + 512 \mu^4 g_0$$
$$+ \mu g_0^2 (16 - 12 m^2) + \mu^2 g_0 (-64 + 48 m^2)]$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)} \lambda_{2,1}^{(0)} [4\mu (2\mu - g_0)^4 - 22 \mu^2 (2\mu - g_0)^3$$
$$- 44 \mu^3 (2\mu - g_0)^2 + 32 \mu^4 (2\mu - g_0)$$
$$+ \mu (2\mu - g_0)^2 (-8 + 6 m^2) + \mu^2 (2\mu - g_0)(-16 + 12 m^2)]$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)} \lambda_{6,1}^{(0)} [4\mu (6\mu - g_0)^4 + 22 \mu^2 (6\mu - g_0)^3$$
$$- 44 \mu^3 (6\mu - g_0)^2 - 32 \mu^4 (6\mu - g_0)$$
$$+ \mu (6\mu - g_0)^2 (-8 + 6 m^2) + \mu^2 (6\mu - g_0)(16 - 12 m^2)]$$
$$+ (\lambda_{2,0}^{(0)})^2 [-4 \mu^2 g_0^4 - 44 \mu^3 g_0^3 - 164 \mu^4 g_0^2 - 112 \mu^5 g_0$$
$$+ \mu^2 g_0^2 (24 - 6 m^2) + \mu^3 g_0 (-96 + 24 m^2)]$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)} \lambda_{4,0}^{(0)} \lambda_{2,-1}^{(0)} [16 \mu^2 (2\mu - g_0)^4 - 88 \mu^3 (2\mu - g_0)^3$$
$$- 2896 \mu^4 (2\mu - g_0)^2 + 1600 \mu^5 (2\mu - g_0)$$
$$+ \mu^2 (2\mu - g_0)^2 (-96 + 24 m^2) + \mu^3 (2\mu - g_0)(-192 + 48 m^2)]$$
$$+ (\lambda_{2,0}^{(0)})^2 \lambda_{4,-1}^{(0)} [8 \mu^2 (4\mu - g_0)^4 - 680 \mu^4 (4\mu - g_0)^2 + \mu^2 (4\mu - g_0)^2 (-48 + 12 m^2)]$$
$$+ (\lambda_{2,0}^{(0)})^3 \lambda_{2,-1}^{(0)} [-96 \mu^3 (2\mu - g_0)^2 - 192 \mu^4 (2\mu - g_0)]$$
$$+ m^4 [-\tfrac{171}{64} g_0^2 + g_0 (-9 + \tfrac{45}{16} m) + 18 - \tfrac{45}{4} m]$$
$$+ m^4 \lambda_{2,0}^{(0)} \lambda_{2,1}^{(0)} [-\tfrac{171}{16} (2\mu - g_0)^2 - 18 \mu (2\mu - g_0) - \tfrac{171}{4} \mu^2$$
$$+ (2\mu - g_0)(36 - \tfrac{45}{4} m) + \mu (-72 + \tfrac{45}{2} m) + 72 - 45 m]$$
$$+ m^2 \lambda_{2,1}^{(0)} [\tfrac{21}{8} (2\mu - g_0)^3 + (2\mu - g_0)^2 (\tfrac{15}{2} - \tfrac{27}{4} m)$$
$$+ (2\mu - g_0)(-33 + 27 m - \tfrac{33}{4} m^2) - \tfrac{33}{2} + 18 m - \tfrac{33}{4} m^2 + \tfrac{243}{128} m^4]$$
$$+ m^2 \lambda_{6,1}^{(0)} [-\tfrac{21}{8} (6\mu - g_0)^3 + (6\mu - g_0)^2 (\tfrac{15}{2} - \tfrac{27}{4} m)$$
$$+ (6\mu - g_0)(33 - 27 m + \tfrac{33}{4} m^2) - \tfrac{33}{2} + 18 m - \tfrac{33}{4} m^2 + \tfrac{243}{128} m^4]$$
$$+ m^2 \lambda_{2,0}^{(0)} [\tfrac{21}{4} \mu g_0^3 + \tfrac{111}{2} \mu^2 g_0^2 + 21 \mu^3 g_0$$
$$+ \tfrac{21}{4} g_0^3 + \mu g_0^2 (-30 + \tfrac{27}{2} m) + \mu^2 g_0 (60 - 27 m) - 42 \mu^3$$
$$+ g_0^2 (-15 + \tfrac{27}{2} m) + \mu g_0 (-198 + 108 m - \tfrac{33}{2} m^2) + \mu^2 (-60 + 54 m)$$
$$+ g_0 (-66 + 54 m - \tfrac{33}{2} m^2) + \mu (132 - 108 m + 33 m^2)$$
$$+ 33 - 36 m + \tfrac{33}{2} m^2 - \tfrac{243}{64} m^4]$$

$$\begin{aligned}
&+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}\lambda_{2,-1}^{(0)}\big[-\tfrac{21}{2}\mu(2\mu-g_0)^3+222\mu^2(2\mu-g_0)^2-168\mu^3(2\mu-g_0)\\
&\qquad +\tfrac{21}{4}(2\mu-g_0)^3+\mu(2\mu-g_0)^2(60-27m)\\
&\qquad +\mu^2(2\mu-g_0)(240-108m)+336\mu^3\\
&\qquad +(2\mu-g_0)^2(-15+\tfrac{27}{2}m)\\
&\qquad +\mu(2\mu-g_0)(396-216m+33m^2)+\mu^2(-240+216m)\\
&\qquad +(2\mu-g_0)(-66+54m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu(-264+216m-66m^2)\\
&\qquad +33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4\big]\\
&+ m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,-1}^{(0)}\big[111\mu^2(4\mu-g_0)^2+\mu(4\mu-g_0)^2(60-27m)+84\mu^3\\
&\qquad +(4\mu-g_0)^2(-30+27m)+\mu^2(-120+108m)\\
&\qquad +\mu(-264+216m-66m^2)+66-72m+33m^2-\tfrac{243}{32}m^4\big]\\
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{2,-1}^{(0)}\big[\tfrac{21}{2}\mu(2\mu-g_0)^3+201\mu^2(2\mu-g_0)^2+162\mu^3(2\mu-g_0)+474\mu^4\\
&\qquad -\tfrac{63}{4}(2\mu-g_0)^3+\mu(2\mu-g_0)^2(-60+27m)\\
&\qquad +\mu^2(2\mu-g_0)(-756+270m)+\mu^3(-324+108m)\\
&\qquad +(2\mu-g_0)^2(-15+\tfrac{27}{2}m)\\
&\qquad +\mu(2\mu-g_0)(-396+216m-33m^2)\\
&\qquad +\mu^2(-1308+756m-99m^2)\\
&\qquad +(2\mu-g_0)(198-162m+\tfrac{99}{2}m^2)+\mu(264-216m+66m^2)\\
&\qquad +33-36m+\tfrac{33}{2}m^2-\tfrac{243}{64}m^4\big]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda_{4,1}^{(0)}$ jusqu'au sixième ordre :

$$\begin{aligned}
\mathrm{o} = {}&\lambda_{4,1}^{(0)}\big[(4\mu+g_0)^4+(4\mu+g_0)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)\big]\\
&+\lambda_{4,0}^{(0)}\big[8\mu g_0^4-88\mu^2g_0^3-352\mu^3g_0^2+512\mu^4g_0\\
&\qquad +\mu g_0^2(-16+12m^2)+\mu^2g_0(-64+48m^2)\big]\\
&+\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{2,1}^{(0)}\big[4\mu(2\mu+g_0)^4-22\mu^2(2\mu+g_0)^3\\
&\qquad -44\mu^3(2\mu+g_0)^2+32\mu^4(2\mu+g_0)\\
&\qquad +\mu(2\mu+g_0)^2(-8+6m^2)+\mu^2(2\mu+g_0)(-16+12m^2)\big]\\
&+(\lambda_{2,0}^{(0)})^2\big[4\mu^2g_0^4-44\mu^3g_0^3+164\mu^4g_0^2-112\mu^5g_0\\
&\qquad +\mu^2g_0^2(-24+6m^2)+\mu^3g_0(-96+24m^2)\big]\\
&+m^4\big[\tfrac{171}{64}g_0^2+g_0(-9+\tfrac{45}{16}m)-18+\tfrac{45}{4}m\big]\\
&+m^2\lambda_{2,1}^{(0)}\big[\tfrac{21}{8}(2\mu+g_0)^3+(2\mu+g_0)^2(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m)\\
&\qquad +(2\mu+g_0)(-33+27m-\tfrac{33}{4}m^2)-\tfrac{33}{2}+18m-\tfrac{33}{4}m^2+\tfrac{243}{128}m^4\big]\\
&+m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\big[\tfrac{21}{4}\mu g_0^3-\tfrac{111}{2}\mu^2g_0^2+21\mu^3g_0\\
&\qquad +\tfrac{21}{4}g_0^3+\mu g_0^2(30-\tfrac{27}{2}m)+\mu^2g_0(60-27m)+42\mu^3\\
&\qquad +g_0^2(15-\tfrac{27}{2}m)+\mu g_0(-198+108m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu^2(60-54m)\\
&\qquad +g_0(-66+54m-\tfrac{33}{2}m^2)+\mu(-132+108m-33m^2)\\
&\qquad -33+36m-\tfrac{33}{2}m^2+\tfrac{243}{64}m^4\big]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda^{(0)}_{6,\pm 1}$ jusqu'au huitième ordre (deux formules sont ainsi réunies en une seule) :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \lambda^{(0)}_{6,\pm 1}\left[(6\mu \pm g_0)^4 + (6\mu \pm g_0)^2\left(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4\right)\right] \\
& + \lambda^{(0)}_{6,0}\left[\pm 12\mu g_0^4 - 198\mu^2 g_0^3 \mp 1188\mu^3 g_0^2 + 2592\mu^4 g_0\right. \\
& \qquad \left. \pm \mu g_0^2(-24 + 18m^2) + \mu^2 g_0(-144 + 108m^2)\right] \\
& + \lambda^{(0)}_{4,0}\lambda^{(0)}_{2,\pm 1}\left[8\mu(2\mu \pm g_0)^4 - 88\mu^2(2\mu \pm g_0)^3\right. \\
& \qquad - 352\mu^3(2\mu \pm g_0)^2 + 512\mu^4(2\mu \pm g_0) \\
& \qquad \left. + \mu(2\mu \pm g_0)^2(-16 + 12m^2) + \mu^2(2\mu \pm g_0)(-64 + 48m^2)\right] \\
& + \lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,\pm 1}\left[4\mu(4\mu \pm g_0)^4 - 22\mu^2(4\mu \pm g_0)^3\right. \\
& \qquad - 44\mu^3(4\mu \pm g_0)^2 + 32\mu^4(4\mu \pm g_0) \\
& \qquad \left. + \mu(4\mu \pm g_0)^2(-8 + 6m^2) + \mu^2(4\mu \pm g_0)(-16 + 12m^2)\right] \\
& + \lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,0}\left[\pm 16\mu^2 g_0^4 - 264\mu^3 g_0^3 \pm 1136\mu^4 g_0^2 - 960\mu^5 g_0\right. \\
& \qquad \left. \pm \mu^2 g_0^2(-96 + 24m^2) + \mu^3 g_0(-576 + 144m^2)\right] \\
& + (\lambda^{(0)}_{2,0})^2\lambda^{(0)}_{2,\pm 1}\left[4\mu^2(2\mu \pm g_0)^4 - 44\mu^3(2\mu \pm g_0)^3\right. \\
& \qquad + 164\mu^4(2\mu \pm g_0)^2 - 112\mu^5(2\mu \pm g_0) \\
& \qquad \left. + \mu^2(2\mu \pm g_0)^2(-24 + 6m^2) + \mu^3(2\mu \pm g_0)(-96 + 24m^2)\right] \\
& + (\lambda^{(0)}_{2,0})^3\left[\mp 32\mu^3 g_0^2 - 192\mu^4 g_0\right] \\
& + m^6\left[\mp \tfrac{243}{128}\right] \\
& + m^4\lambda^{(0)}_{2,\pm 1}\left[\tfrac{171}{64}(2\mu \pm g_0)^2 + (2\mu \pm g_0)\left(-9 + \tfrac{45}{16}m\right) - 18 + \tfrac{45}{4}m\right] \\
& + m^4\lambda^{(0)}_{2,0}\left[\pm \tfrac{171}{16}g_0^2 - 18\mu g_0 \pm \tfrac{171}{4}\mu^2\right. \\
& \qquad \left. + g_0\left(-36 + \tfrac{45}{4}m\right) \pm \mu\left(-72 + \tfrac{45}{2}m\right) \pm (-72 + 45m)\right] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{4,\pm 1}\left[\tfrac{21}{8}(4\mu \pm g_0)^3 + (4\mu \pm g_0)^2\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{27}{4}m\right)\right. \\
& \qquad \left. + (4\mu \pm g_0)\left(-33 + 27m - \tfrac{33}{4}m^2\right) - \tfrac{33}{2} + 18m - \tfrac{33}{4}m^2 + \tfrac{243}{128}m^4\right] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{4,0}\left[\tfrac{21}{2}\mu g_0^3 \mp 222\mu^2 g_0^2 + 168\mu^3 g_0\right. \\
& \qquad + \tfrac{21}{4}g_0^3 \pm \mu g_0^2(60 - 27m) + \mu^2 g_0(240 - 108m) \pm 336\mu^3 \\
& \qquad \pm g_0^2\left(15 - \tfrac{27}{2}m\right) \\
& \qquad + \mu g_0(-396 + 216m - 33m^2) \pm \mu^2(240 - 216m) \\
& \qquad + g_0\left(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2\right) \pm \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
& \qquad \left. \pm \left(-33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4\right)\right] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{2,\pm 1}\left[\tfrac{21}{4}\mu(2\mu \pm g_0)^3 - \tfrac{111}{2}\mu^2(2\mu \pm g_0)^2 + 21\mu^3(2\mu \pm g_0)\right. \\
& \qquad + \tfrac{21}{4}(2\mu \pm g_0)^3 + \mu(2\mu \pm g_0)^2\left(30 - \tfrac{27}{2}m\right) \\
& \qquad + \mu^2(2\mu \pm g_0)(60 - 27m) + 42\mu^3 \\
& \qquad + (2\mu \pm g_0)^2\left(15 - \tfrac{27}{2}m\right) \\
& \qquad + \mu(2\mu \pm g_0)\left(-198 + 108m - \tfrac{33}{2}m^2\right) + \mu^2(60 - 54m) \\
& \qquad + (2\mu \pm g_0)\left(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2\right) + \mu(-132 + 108m - 33m^2) \\
& \qquad \left. - 33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\, m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2 [& \tfrac{21}{2}\mu g_0^3 \mp 81\mu^2 g_0^2 + 162\mu^3 g_0 \mp 138\mu^4 \\
& + \tfrac{21}{4} g_0^3 \pm \mu g_0^2(60 - 27m) + \mu^2 g_0(-276 + 54m) \pm \mu^3(324 - 108m) \\
& \pm g_0^2(15 - \tfrac{27}{2}m) \\
& + \mu g_0(-396 + 216m - 33m^2) \pm \mu^2(-276 + 108m - 33m^2) \\
& + g_0(-66 + 54m - \tfrac{33}{2}m^2) \pm \mu(-264 + 216m - 66m^2) \\
& \pm (-33 + 36m - \tfrac{33}{2}m^2 + \tfrac{243}{64}m^4)] \\
+ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

7. La résolution de ces équations par la méthode des approximations successives fournit aisément les valeurs des inconnues développées suivant les puissances de m. On trouvera plus loin ces valeurs qu'il est inutile de transcrire ici : elles sont, en effet, identiques à celles que fournit la deuxième méthode que j'ai employée et que je vais exposer maintenant. Comme je l'ai déjà dit, d'ailleurs, cette méthode n'est que le développement de celle donnée par M. Hill dans son Mémoire : *Researches in the lunar theory* (*American Journal of Mathematics*, t. I). Toutefois, pour plus de clarté, je vais en reprendre l'exposition dès le début et sous une forme un peu différente, qui me permettra d'appliquer aisément les procédés de résolution qui m'ont déjà servi.

Le problème à résoudre est le même que précédemment. Je prends les équations du mouvement sous leur forme habituelle (*voir* mon Mémoire, déjà cité)

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{f(\mathrm{M}+\mathrm{M}_0)}{r} - 2\int(d\mathrm{R}) - r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0, \\
\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{f(\mathrm{M}+\mathrm{M}_0)}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0,
\end{gathered}
$$

où, comme on l'a déjà vu, et en gardant toutes les notations déjà employées,

$$
\mathrm{R} = \frac{n'^2 r^2}{4}(1 + 3\cos 2\mathrm{H}) \qquad \text{et} \qquad (d\mathrm{R}) = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}dr + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}dv.
$$

J'élimine f entre ces deux équations; il vient, en représentant les dérivées à l'aide d'accents,

$$
2rr'' + r'^2 - r^2 v'^2 - 2\int(d\mathrm{R}) - 2r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0.
$$

Comme les coordonnées du Soleil ne figurent dans R que par N', à cause de $\mathrm{H} = v - \mathrm{N}'$, on a

$$
\int(d\mathrm{R}) = \mathrm{R} - \tfrac{3}{2}n'^2\int r^2 \sin 2\mathrm{H}\, dt.
$$

D'ailleurs, on a toujours l'équation employée antérieurement

$$\frac{d}{dt}(r^2 v') + \tfrac{3}{2} n'^2 r^2 \sin 2\mathrm{H} = 0,$$

de sorte que celle déjà obtenue peut s'écrire finalement sous la forme

$$2rr'' + r'^2 - r^2 v'^2 - 2n' r^2 v' - \tfrac{1}{2} n'^2 r^2 (1 + 3\cos 2\mathrm{H}) = \text{const.}$$

Ce sont ces deux dernières équations que je vais utiliser.

Je fais toujours $v = \mathrm{N} + \lambda$ et je remplace r et v par

$$x = r\cos\lambda,$$
$$y = r\sin\lambda,$$

de sorte que les nouvelles inconnues sont les coordonnées rectangulaires de la Lune dans son mouvement relatif par rapport à des axes mobiles, Ox étant la position moyenne du rayon vecteur de la Lune.

Les équations deviennent alors

$$\frac{d}{dt}[n(x^2 + y^2) + xy' - x'y] + 3n'^2 xy\cos 2\mathrm{K} + \tfrac{3}{2} n'^2 (x^2 - y^2)\sin 2\mathrm{K} = 0,$$

$$2(xx'' + yy'') + x'^2 + y'^2 - 2(n + n')(xy' - x'y)$$
$$- (x^2 + y^2)(n^2 + 2nn' + \tfrac{3}{2} n'^2) - \tfrac{9}{2} n'^2 (x^2 - y^2)\cos 2\mathrm{K} + 9n'^2 xy\sin 2\mathrm{K} = \text{const.}$$

8. On peut développer x et y comme j'ai développé λ dans la première méthode; je pose donc

$$x = \alpha(1 + \Sigma x_p \cos \mathrm{V}_p),$$
$$y = \alpha \Sigma y_p \sin \mathrm{V}_p,$$

les V_p étant les mêmes arguments que précédemment (0 exclu), et la symétrie des séries étant toujours supposée conservée. Le terme constant, α, dans x est une constante arbitraire qui s'introduit comme conséquence de la méthode employée : on la déterminerait aisément en revenant aux équations primitives. D'ailleurs, il y a une autre constante arbitraire véritable (correspondant à l'excentricité) que j'appellerai η et que je prendrai égale au coefficient de $\sin \mathrm{G}$ dans $\frac{y}{\alpha}$, de sorte que $y_{0,1} = \eta$.

Alors les coefficients $x_{p,q}$, $y_{p,q}$ seront de la forme

$$x_{p,q} = \eta^{|q|}(x_{p,q}^{(0)} + x_{p,q}^{(2)}\eta^2 + x_{p,q}^{(4)}\eta^4 + \ldots),$$
$$y_{p,q} = \eta^{|q|}(y_{p,q}^{(0)} + y_{p,q}^{(2)}\eta^2 + y_{p,q}^{(4)}\eta^4 + \ldots),$$

les $x^{(i)}_{p,q}$, $y^{(i)}_{p,q}$ étant analogues aux $\lambda^{(i)}_{p,q}$. De même, g sera de la forme

$$g = n(g_{(0)} + g_{(2)}\eta^2 + g_{(4)}\eta^4 + g_{(6)}\eta^6 + \ldots),$$

les $g_{(i)}$ étant analogues aux g_i; $g_{(0)}$ doit, d'ailleurs, coïncider avec g_0, de sorte que j'écrirai simplement g_0 partout.

Je substitue maintenant ces valeurs dans les deux équations; le résultat se développe, pour la première, suivant les sinus des arguments V_p et, pour la deuxième, suivant les cosinus des mêmes angles. J'égale alors à zéro les coefficients de $\sin V_p$ et $\cos V_p$ dans ces deux résultats de substitution (la valeur o de V_p étant exclue), et j'obtiens les deux équations suivantes, que l'on comprendra comme celle qui donne λ_p

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p) & \Sigma[k_p(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} + k_p(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2})] \\ \mathbf{V}_{p_1} - \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p \mp 2\mathbf{K}) & \quad + m^2\Sigma[\tfrac{3}{2}x_{p_1}y_{p_2} \pm \tfrac{3}{4}(y_{p_1}y_{p_2} + x_{p_1}x_{p_2})] = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p) & \Sigma[(k_{p_1}k_{p_2} - k_p^2 - 1 - 2m - \tfrac{3}{2}m^2)(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) \\ & \qquad\qquad - 2(1+m)(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}] \\ \mathbf{V}_{p_1} - \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p \mp 2\mathbf{K}) & \quad + m^2\Sigma[\tfrac{9}{4}(y_{p_1}y_{p_2} + x_{p_1}x_{p_2}) \pm \tfrac{9}{2}x_{p_1}y_{p_2}] = 0. \end{array}$$

Dans ces équations, V_{p_1} et V_{p_2} peuvent prendre la valeur o : il est clair, d'ailleurs, que, si $V_{p_1} = 0$, on doit faire $x_{p_1} = 1$, $y_{p_1} = 0$.

Dans la première ligne de chacune de ces équations, je mets en évidence les termes qui proviennent de la combinaison $\left.\begin{matrix} V_{p_1} \\ V_{p_2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ V_p \end{matrix}\right.$; puis, entre les équations ainsi écrites, j'élimine x_p mis en évidence : j'obtiens l'équation suivante propre à déterminer y_p

$$k_p^2(k_p^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)y_p = \left\{\begin{array}{ll} \left(\begin{matrix} \mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p \\ \mathbf{V}_{p_1}, \mathbf{V}_{p_2} \quad \neq 0 \end{matrix}\right) & 2k_p\Sigma\tfrac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) \\ & \quad + k_p(k_p^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)\Sigma(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} \\ \mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p \mp 2\mathbf{K}) & + m^2[\tfrac{9}{2}k_p \pm \tfrac{3}{2}(k_p^2 + 1 + 2m + \tfrac{3}{2}m^2)] \\ & \quad \times \Sigma(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2} + \tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2} \pm x_{p_1}y_{p_2}). \end{array}\right.$$

Quant à x_p, je reprendrai, pour le déterminer, la première des deux

équations obtenues plus haut en l'écrivant sous la forme

$$
\begin{aligned}
x_p = \frac{k_p}{2} y_p &+ \sum_{\substack{V_{p_1} - V_{p_2} = V_p \\ V_{p_1}, V_{p_2} \neq 0}} \left[\tfrac{1}{2}\Sigma (k_p - k_{p_1}) x_{p_1} y_{p_2} - \Sigma \tfrac{1}{2} (y_{p_1} y_{p_2} - x_{p_1} x_{p_2})\right] \\
&+ \sum_{V_{p_1} - V_{p_2} = V_p - 2K} \frac{3}{4} \frac{m^2}{k_p} \Sigma \left(\tfrac{1}{2} y_{p_1} y_{p_2} + \tfrac{1}{2} x_{p_1} x_{p_2} - x_{p_1} y_{p_2}\right).
\end{aligned}
$$

Telles sont les deux équations fondamentales que je vais appliquer : on voit, d'ailleurs, avec quelle facilité le calcul relatif à x_p pourra être achevé quand on aura fait celui qui donne y_p, les mêmes quantités se reproduisant dans les deux équations.

9. Si maintenant on remarque que

$$\lambda = \text{arc tang} \frac{y}{x} = \text{arc tang} \frac{\Sigma y_p \sin V_p}{1 - \Sigma x_p \cos V_p},$$

on obtient aisément la relation suivante pour déterminer λ_p

$$
\begin{aligned}
\lambda_p = y_p + \sum_{\substack{V_{p_1} + V_{p_2} + \ldots = V_p \\ V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots \neq 0}} \Big(& - x_{p_1} y_{p_2} + \tfrac{1}{3} y_{p_1} y_{p_2} y_{p_3} - x_{p_1} y_{p_2} y_{p_3} y_{p_4} + \tfrac{1}{5} y_{p_1} y_{p_2} y_{p_3} y_{p_4} y_{p_5} + \ldots \\
& + x_{p_1} x_{p_2} y_{p_3} - x_{p_1} x_{p_2} x_{p_3} y_{p_4} + 2 x_{p_1} x_{p_2} y_{p_3} y_{p_4} y_{p_5} \\
& + x_{p_1} x_{p_2} x_{p_3} x_{p_4} y_{p_5} \Big).
\end{aligned}
$$

Cette relation déterminera en particulier la relation qui existe entre ε et η ; si l'on fait $\frac{\varepsilon}{\eta} = \sigma$, σ sera de la forme

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_2 \varepsilon^2 + \sigma_4 \varepsilon^4 + \ldots.$$

10. Les coefficients que je me propose de déterminer sont, comme précédemment, ceux de la forme $x_{p,0}^{(0)}$, $y_{p,0}^{(0)}$, $x_{p,\pm 1}^{(0)}$, $y_{p,\pm 1}^{(0)}$ et, en outre, g_0 ; on fera d'ailleurs, sur l'ordre de ces coefficients, les mêmes remarques que celles faites sur l'ordre de $\lambda_{p,0}^{(0)}$, $\lambda_{p,\pm 1}^{(0)}$; les conclusions seront les mêmes.

On peut alors écrire les équations suivantes, dans lesquelles les termes utiles figurent seuls : j'indique en même temps jusqu'à quel ordre elles permettent de calculer les inconnues sans qu'il soit nécessaire de les compléter.

$y^{(0)}_{2,0}$, $x^{(0)}_{2,0}$, $\lambda^{(0)}_{2,0}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$\begin{aligned}
&4\mu^2(4\mu^2-1+\tfrac{3}{2}m^2)y^{(0)}_{2,0}\\
&\quad= 32\mu^2(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}) - 12\mu^2(4\mu^2-1+\tfrac{3}{2}m^2)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\qquad+ m^2(9\mu+6\mu^2+\tfrac{3}{2}+3m+\tfrac{9}{4}m^2)[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2]\\
&\qquad+ m^2(9\mu-6\mu^2-\tfrac{3}{2}-3m-\tfrac{9}{4}m^2)[x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}]\\
&\qquad+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,0} &= -\mu y^{(0)}_{2,0} - 3\mu(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0}) - (y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0})\\
&\quad+\frac{3m^2}{8\mu}[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2]\\
&\quad-\frac{3m^2}{8\mu}[x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}]\\
&\quad+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(0)}_{2,0} = y^{(0)}_{2,0} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0} + y^{(0)}_{2,0}[-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2]+\ldots.$$

$y^{(0)}_{4,0}$, $x^{(0)}_{4,0}$, $\lambda^{(0)}_{4,0}$ jusqu'au onzième ordre :

$$\begin{aligned}
&16\mu^2(16\mu^2-1+\tfrac{3}{2}m^2)y^{(0)}_{4,0}\\
&\quad= 16\mu^2[(y^{(0)}_{2,0})^2-(x^{(0)}_{2,0})^2] + 96\mu^2(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,0})\\
&\qquad- 32\mu^2(16\mu^2-1+\tfrac{3}{2}m^2)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,0}+x^{(0)}_{6,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\qquad+ m^2(18\mu+24\mu^2+\tfrac{3}{2}+3m+\tfrac{9}{4}m^2)\\
&\qquad\quad\times(x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\qquad+ m^2(18\mu-24\mu^2-\tfrac{3}{2}-3m-\tfrac{9}{4}m^2)\\
&\qquad\quad\times(x^{(0)}_{6,0}-y^{(0)}_{6,0}+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\qquad+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{(0)}_{4,0} &= -2\mu y^{(0)}_{4,0} - 4\mu(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,0}+x^{(0)}_{6,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\quad+\tfrac{1}{2}[(y^{(0)}_{2,0})^2-(x^{(0)}_{2,0})^2] - (y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,0})\\
&\quad+\frac{3m^2}{16\mu}(x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\quad-\frac{3m^2}{16\mu}(x^{(0)}_{6,0}-y^{(0)}_{6,0}+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\quad+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)}_{4,0} &= y^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,0} + x^{(0)}_{6,0}y^{(0)}_{2,0}\\
&\quad+ 2y^{(0)}_{4,0}[-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2] + 2x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}[(y^{(0)}_{2,0})^2-(x^{(0)}_{2,0})^2]+\ldots.
\end{aligned}$$

$y^{(0)}_{6,0}$, $x^{(0)}_{6,0}$, $\lambda^{(0)}_{6,0}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
&36\mu^2(36\mu^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)\,y^{(0)}_{6,0}\\
&\quad = 96\mu^3(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}) + 12\mu^2(36\mu^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)(-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\qquad + m^2(27\mu + 54\mu^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2)\\
&\qquad\quad \times [x^{(0)}_{4,0} + y^{(0)}_{4,0} + \tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}]\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{6,0} &= -3\mu y^{(0)}_{6,0} + \mu(-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0}) + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}\\
&\quad + \frac{m^2}{8\mu}(x^{(0)}_{4,0} + y^{(0)}_{4,0} + \tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0})\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\lambda^{(0)}_{6,0} = y^{(0)}_{6,0} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0} + \tfrac{1}{3}(y^{(0)}_{2,0})^3 + (x^{(0)}_{2,0})^2 y^{(0)}_{2,0} + \ldots
$$

g_0 jusqu'au dixième ordre :

$$
\begin{aligned}
&g_0^2(g_0^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)\\
&\quad = 2g_0[\;2\mu(2\mu - g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}) + 2\mu(2\mu + g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1})\\
&\qquad\qquad + 4\mu(4\mu - g_0)(y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,-1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,-1}) + 4\mu(4\mu + g_0)(y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,1})]\\
&\qquad + g_0(g_0^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)\\
&\qquad\quad \times [-(4\mu - g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}) - (4\mu + g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1})\\
&\qquad\qquad - (8\mu - g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,-1} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,-1}) - (8\mu + g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,1} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,1})]\\
&\qquad + m^2(\tfrac{9}{2}g_0 + \tfrac{3}{2}g_0^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2)\\
&\qquad\quad \times [x^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1} + x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1}\\
&\qquad\qquad\qquad - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1}\\
&\qquad\qquad\qquad - y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,1} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,1}]\\
&\qquad + m^2(\tfrac{9}{2}g_0 - \tfrac{3}{2}g_0^2 - \tfrac{3}{2} - 3m - \tfrac{9}{4}m^2)\\
&\qquad\quad \times [x^{(0)}_{2,1} - y^{(0)}_{2,1} + y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1} - x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1}\\
&\qquad\qquad\qquad - y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1}\\
&\qquad\qquad\qquad - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1}]\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$x_{0,1}^{(0)}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}
x_{0,1}^{(0)} = -\frac{g_0}{2} + \tfrac{1}{2}\big[& -(4\mu - g_0)(x_{2,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)}) \\
& -(4\mu + g_0)(x_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)}) \\
& -(8\mu - g_0)(x_{4,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + y_{4,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)})\big] \\
& - y_{2,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)} \\
& + \frac{3}{4}\frac{m^2}{g_0}\big(x_{2,-1}^{(0)} - y_{2,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} \\
& \qquad - y_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)}\big) \\
& - \frac{3}{4}\frac{m^2}{g_0}\big(x_{2,1}^{(0)} - y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} \\
& \qquad - y_{4,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} + x_{4,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)} + x_{4,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)}\big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

σ_0 jusqu'au septième ordre :

$$\sigma_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\, y_{-2,1}^{(0)} + \mathrm{B}' x_{-2,1}^{(0)} + \mathrm{C}\, y_{2,1}^{(0)} + \mathrm{C}' x_{2,1}^{(0)} + \mathrm{D}\, y_{-4,1}^{(0)} + \mathrm{D}' x_{-4,1}^{(0)} + \ldots,$$

en faisant

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= 1 + 2[(-y_{2,0}^{(0)})^2 + (x_{2,0}^{(0)})^2], \\
\mathrm{B} &= -x_{2,0}^{(0)} + 2(-y_{2,0}^{(0)} y_{4,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{4,0}^{(0)}) + 3x_{2,0}^{(0)}[(y_{2,0}^{(0)})^2 - (x_{2,0}^{(0)})^2], \\
\mathrm{B}' &= -y_{2,0}^{(0)} + 2(x_{2,0}^{(0)} y_{4,0}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} y_{2,0}^{(0)}) + 3y_{2,0}^{(0)}[(y_{2,0}^{(0)})^2 - (x_{2,0}^{(0)})^2], \\
\mathrm{C} &= -x_{2,0}^{(0)}, \\
\mathrm{C}' &= y_{2,0}^{(0)}, \\
\mathrm{D} &= -x_{4,0}^{(0)} + (y_{2,0}^{(0)})^2 + (x_{2,0}^{(0)})^2, \\
\mathrm{D}' &= -y_{4,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)} y_{2,0}^{(0)}.
\end{aligned}$$

$y_{2,-1}^{(0)}$, $x_{2,-1}^{(0)}$, $\lambda_{2,-1}^{(0)}$ jusqu'au huitième ordre :

$$\begin{aligned}
& (2\mu - g_0)^2[(2\mu - g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]\, y_{2,-1}^{(0)} \\
& \quad = 2(2\mu - g_0)\big[2\mu g_0(y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)}) + 2\mu(4\mu - g_0)(y_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)}) \\
& \qquad\qquad + 4\mu(2\mu + g_0)(y_{4,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} + x_{4,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)}) \\
& \qquad\qquad + 4\mu(6\mu - g_0)(y_{4,0}^{(0)} y_{6,-1}^{(0)} + x_{4,0}^{(0)} x_{6,-1}^{(0)})\big] \\
& \qquad + (2\mu - g_0)[(2\mu - g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2] \\
& \qquad\quad \times \big[-(2\mu + g_0)(x_{2,0}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)}) - (6\mu - g_0)(x_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)}) \\
& \qquad\qquad - (6\mu + g_0)(x_{4,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} + y_{4,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)}) - (10\mu - g_0)(x_{4,0}^{(0)} y_{6,-1}^{(0)} + y_{4,0}^{(0)} x_{6,-1}^{(0)})\big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ m^2\left[\tfrac{9}{2}(2\mu - g_0) + \tfrac{3}{2}(2\mu - g_0)^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2\right] \\
&\quad \times \left(x^{(0)}_{0,1} - 1 - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}\right. \\
&\qquad\qquad - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1} \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,-1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,-1} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{4,-1} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{4,-1}\right) \\
&+ m^2\left[\tfrac{9}{2}(2\mu - g_0) - \tfrac{3}{2}(2\mu - g_0)^2 - \tfrac{3}{2} - 3m - \tfrac{9}{4}m^2\right] \\
&\quad \times \left(x^{(0)}_{4,-1} - y^{(0)}_{4,-1} + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}\right. \\
&\qquad\qquad - y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1} \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,-1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,-1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,-1}\right) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,-1} = {} & -\frac{2\mu - g_0}{2}y^{(0)}_{2,-1} + \tfrac{1}{2}\left[-(2\mu + g_0)(x^{(0)}_{2,0} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1})\right. \\
&\qquad\qquad - (6\mu - g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1}) \\
&\qquad\qquad \left. - (6\mu + g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,1} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,1})\right] \\
& - y^{(0)}_{2,0} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1} - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1} - y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,1} - x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,1} \\
& + \frac{3}{4}\,\frac{m^2}{2\mu - g_0}\left(x^{(0)}_{0,1} - 1 - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1}\right) \\
& - \frac{3}{4}\,\frac{m^2}{2\mu - g_0}\left(x^{(0)}_{4,-1} - y^{(0)}_{4,-1} + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\lambda^{(0)}_{2,-1} = \frac{1}{\sigma_0}\left(\mathrm{A}y^{(0)}_{2,-1} + \mathrm{B}y^{(0)}_{0,-1} + \mathrm{B}'x^{(0)}_{0,-1} + \mathrm{C}y^{(0)}_{4,-1} + \mathrm{C}'x^{(0)}_{4,-1} + \mathrm{D}y^{(0)}_{-2,-1} + \mathrm{D}'x^{(0)}_{-2,-1} + \ldots\right).
$$

$y^{(0)}_{2,1}$, $x^{(0)}_{2,1}$, $\lambda^{(0)}_{2,1}$ jusqu'au huitième ordre :

$$
\begin{aligned}
&(2\mu + g_0)^2\left[(2\mu + g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{2,1} \\
&\quad = 2(2\mu + g_0)\left[2\mu g_0(y^{(0)}_{2,0} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1})\right. \\
&\qquad\qquad + 4\mu(2\mu - g_0)(y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1}) \\
&\qquad\qquad \left. + 2\mu(4\mu + g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1})\right] \\
&\quad + (2\mu + g_0)\left[(2\mu + g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2\right] \\
&\qquad \times \left[(2\mu - g_0)(x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1})\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (6\mu - g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1}) - (6\mu + g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1})\right] \\
&\quad + m^2\left[\tfrac{9}{2}(2\mu + g_0) + \tfrac{3}{2}(2\mu + g_0)^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2\right] \\
&\qquad \times \left(x^{(0)}_{0,1} + 1 - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1} - x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1} + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1} - y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1}\right)
\end{aligned}
$$

$$+ m^2[\tfrac{9}{2}(2\mu+g_0)-\tfrac{3}{2}(2\mu+g_0)^2-\tfrac{3}{2}-3m-\tfrac{9}{4}m^2]$$
$$\times(x^{(0)}_{4,1}-y^{(0)}_{4,1}+y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}-x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}$$
$$+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{(0)}_{2,1}=-\frac{2\mu+g_0}{2}y^{(0)}_{2,1}+\tfrac{1}{2}[(2\mu-g_0)(x^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1})$$
$$-(6\mu-g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1}+y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1})$$
$$-(6\mu+g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1}+y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1})]$$
$$+y^{(0)}_{2,0}-x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1}-y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1}-x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1}-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,1}-x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,1}$$
$$+\frac{3}{4}\frac{m^2}{2\mu+g_0}(x^{(0)}_{0,1}+1-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1}+y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1}$$
$$-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1}+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1})$$
$$-\frac{3}{4}\frac{m^2}{2\mu+g_0}(x^{(0)}_{4,1}-y^{(0)}_{4,1}+y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}-x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}$$
$$+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda^{(0)}_{2,1}=\frac{1}{\sigma_0}(\mathrm{A}y^{(0)}_{2,1}+\mathrm{B}y^{(0)}_{0,1}+\mathrm{B}'x^{(0)}_{0,1}+\mathrm{C}y^{(0)}_{4,1}+\mathrm{C}'x^{(0)}_{4,1}+\mathrm{D}y^{(0)}_{-2,1}+\mathrm{D}'x^{(0)}_{-2,1}+\ldots).$$

$y^{(0)}_{4,-1}$, $x^{(0)}_{4,-1}$, $\lambda^{(0)}_{4,-1}$ jusqu'au septième ordre :

$$(4\mu-g_0)^2[(4\mu-g_0)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2]y^{(0)}_{4,-1}$$
$$=2(4\mu-g_0)[2\mu(2\mu-g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1}-x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1})$$
$$+4\mu g_0(y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1})$$
$$+2\mu(6\mu-g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,-1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,-1})]$$
$$+(4\mu-g_0)[(4\mu-g_0)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2]$$
$$\times[g_0(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,-1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,-1})$$
$$-(4\mu+g_0)(x^{(0)}_{4,0}+y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1})-(8\mu-g_0)(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{6,-1}+y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{6,-1})]$$
$$+m^2[\tfrac{9}{2}(4\mu-g_0)+\tfrac{3}{2}(4\mu-g_0)^2+\tfrac{3}{2}+3m+\tfrac{9}{4}m^2]$$
$$\times(x^{(0)}_{2,-1}+y^{(0)}_{2,-1}-y^{(0)}_{2,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1}-x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{0,1}$$
$$-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1}+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1})$$
$$+m^2[\tfrac{9}{2}(4\mu-g_0)-\tfrac{3}{2}(4\mu-g_0)^2-\tfrac{3}{2}-3m-\tfrac{9}{4}m^2]$$
$$\times(x^{(0)}_{6,-1}-y^{(0)}_{6,-1}+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,-1}-y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,-1}$$
$$+y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1}+x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1}-x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,-1}-y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{4,-1}^{(0)} = -\frac{4\mu - g_0}{2} y_{4,-1}^{(0)} + \tfrac{1}{2}[g_0(x_{2,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)})$$
$$- (4\mu + g_0)(x_{4,0}^{(0)} + y_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)})$$
$$- (8\mu - g_0)(x_{2,0}^{(0)} y_{6,-1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{6,-1}^{(0)})]$$
$$+ y_{2,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} y_{6,-1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{6,-1}^{(0)}$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{m^2}{4\mu - g_0}(x_{2,-1}^{(0)} + y_{2,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)}$$
$$- y_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)})$$
$$- \frac{3}{4}\frac{m^2}{4\mu - g_0}(x_{6,-1}^{(0)} - y_{6,-1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} y_{4,-1}^{(0)} - y_{2,0}^{(0)} x_{4,-1}^{(0)}$$
$$+ y_{4,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} + x_{4,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} y_{2,-1}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} x_{2,-1}^{(0)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{4,-1}^{(0)} = \frac{1}{\sigma_0}(A y_{4,-1}^{(0)} + B y_{2,-1}^{(0)} + B' x_{2,-1}^{(0)} + C y_{6,-1}^{(0)} + C' x_{6,-1}^{(0)} + D y_{0,-1}^{(0)} + D' x_{0,-1}^{(0)} + \ldots).$$

$y_{4,1}^{(0)}$, $x_{4,1}^{(0)}$, $\lambda_{4,1}^{(0)}$ jusqu'au sixième ordre :

$$(4\mu + g_0)^2[(4\mu + g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2] y_{4,1}^{(0)}$$
$$= 2(4\mu + g_0)[4\mu g_0(y_{4,0}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)}) + 2\mu(2\mu + g_0)(y_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)})]$$
$$+ (4\mu + g_0)[(4\mu + g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]$$
$$\times [(4\mu - g_0)(x_{4,0}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)}) + g_0(-x_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)})]$$
$$+ m^2[\tfrac{9}{2}(4\mu + g_0) + \tfrac{3}{2}(4\mu + g_0)^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2]$$
$$\times (x_{2,1}^{(0)} + y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{4,1}^{(0)} = -\frac{4\mu + g_0}{2} y_{4,1}^{(0)} + \tfrac{1}{2}[(4\mu - g_0)(x_{4,0}^{(0)} - y_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)})$$
$$+ g_0(-x_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)})]$$
$$+ y_{4,0}^{(0)} - x_{4,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} y_{2,1}^{(0)} - x_{2,0}^{(0)} x_{2,1}^{(0)}$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{m^2}{4\mu + g_0}(x_{2,1}^{(0)} + y_{2,1}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)} + x_{2,0}^{(0)} + y_{2,0}^{(0)} x_{0,1}^{(0)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{4,1}^{(0)} = \frac{1}{\sigma_0}(A y_{4,1}^{(0)} + B y_{2,1}^{(0)} + B' x_{2,1}^{(0)} + D y_{0,1}^{(0)} + D' x_{0,1}^{(0)} + \ldots).$$

$y^{(0)}_{6,\pm 1}$, $x^{(0)}_{6,\pm 1}$, $\lambda^{(0)}_{6,\pm 1}$ jusqu'au huitième ordre :

$$\begin{aligned}
&(6\mu \pm g_0)^2[(6\mu \pm g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]y^{(0)}_{6,\pm 1}\\
&\quad = 2(6\mu \pm g_0)[6\mu g_0(y^{(0)}_{6,0} \mp x^{(0)}_{6,0}x^{(0)}_{0,1})\\
&\qquad\qquad + 2\mu(4\mu \pm g_0)(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,\pm 1} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,\pm 1})\\
&\qquad\qquad + 4\mu(2\mu \pm g_0)(y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} - x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,\pm 1})]\\
&\qquad + (6\mu \pm g_0)[(6\mu \pm g_0)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]\\
&\qquad \times [\pm(6\mu \mp g_0)(x^{(0)}_{6,0} \mp y^{(0)}_{6,0}x^{(0)}_{0,1})\\
&\qquad\quad + (2\mu \pm g_0)(-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,\pm 1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,\pm 1}) + (2\mu \mp g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,\pm 1})]\\
&\qquad + m^2[\tfrac{9}{2}(6\mu \pm g_0) + \tfrac{3}{2}(6\mu \pm g_0)^2 + \tfrac{3}{2} + 3m + \tfrac{9}{4}m^2]\\
&\qquad \times (x^{(0)}_{4,\pm 1} + y^{(0)}_{4,\pm 1} \pm y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1} \pm x^{(0)}_{4,0} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}\\
&\qquad\qquad + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,\pm 1} + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,\pm 1})\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{(0)}_{6,\pm 1} = &-\frac{6\mu \pm g_0}{2}y^{(0)}_{6,\pm 1} + \tfrac{1}{2}[\pm(6\mu \mp g_0)(x^{(0)}_{6,0} \mp y^{(0)}_{6,0}x^{(0)}_{0,1})\\
&\qquad + (2\mu \pm g_0)(-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,\pm 1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,\pm 1})\\
&\qquad + (2\mu \mp g_0)(x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} - y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,\pm 1})]\\
&\pm y^{(0)}_{6,0} - x^{(0)}_{6,0}x^{(0)}_{0,1} + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,\pm 1} - x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,\pm 1} + y^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} - x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,\pm 1}\\
&+ \frac{3}{4}\,\frac{m^2}{6\mu \pm g_0}(x^{(0)}_{4,\pm 1} + y^{(0)}_{4,\pm 1} \pm y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1} \pm x^{(0)}_{4,0} + y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{0,1}\\
&\qquad + y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,\pm 1} + x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,\pm 1} + y^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{2,\pm 1})\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)}_{6,\pm 1} = \frac{1}{\sigma_0}\big(&A y^{(0)}_{6,\pm 1} + B y^{(0)}_{4,\pm 1} + B' x^{(0)}_{4,\pm 1} + D y^{(0)}_{2,\pm 1} + D' x^{(0)}_{2,\pm 1}\\
&+ y^{(0)}_{0,\pm 1}\{-x^{(0)}_{6,0} + 2(y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}) - x^{(0)}_{2,0}[3(y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2]\}\\
&+ x^{(0)}_{0,\pm 1}\{-y^{(0)}_{6,0} + 2(x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0}) - y^{(0)}_{2,0}[(y^{(0)}_{2,0})^2 + 3(x^{(0)}_{2,0})^2]\}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\big).
\end{aligned}$$

11. Ces équations, résolues par la méthode des approximations successives, donnent les valeurs écrites ci-dessous des inconnues développées suivant les puissances de m; comme je l'ai dit, d'ailleurs, les valeurs des λ_p et de g_0 obtenues ainsi sont identiques à celles que fournit l'application de la première méthode. Enfin je fais remarquer encore une fois que les calculs ont été menés de façon à obtenir, dans les valeurs des λ_p et de g_0, la même approximation que Delaunay.

Voici les résultats :

$$y^{0}_{2,0} = \frac{11}{2^4}m^2 + \frac{59}{2^3.3}m^3 + \frac{893}{2^4.3^2}m^4 + \frac{2\,855}{2^3.3^3}m^5 + \frac{16\,671\,997}{2^{13}.3^4}m^6$$
$$+ \frac{211\,202\,789}{2^{12}.3^5.5}m^7 + \frac{8\,566\,343\,101}{2^{13}.3^6.5^2}m^8 + \frac{15\,423\,753\,283}{2^{11}.3^7.5^3}m^9 + \ldots,$$

$$x^{0'}_{2,0} = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{19}{2^2.3}m^3 - \frac{32}{3^2}m^4 - \frac{1\,475}{2^4.3^3}m^5 - \frac{8\,032\,171}{2^{14}.3^4}m^6$$
$$- \frac{20\,354\,845}{2^{12}.3^5}m^7 - \frac{949\,114\,763}{2^{13}.3^6.5}m^8 - \frac{8\,300\,239\,033}{2^{12}.3^7.5^2}m^9 + \ldots,$$

$$\lambda^{0'}_{2,0} = \frac{11}{2^4}m^2 + \frac{59}{2^3.3}m^3 + \frac{893}{2^4.3^2}m^4 + \frac{2\,855}{2^3.3^3}m^5 + \frac{8\,304\,449}{2^{12}.3^4}m^6$$
$$+ \frac{102\,859\,909}{2^{11}.3^5.5}m^7 + \frac{3\,748\,175\,501^*}{2^{12}.3^6.5^2}m^8 - \frac{475\,281\,673^*}{2^8.3^7.5^3}m^9 + \ldots;$$

$$y^{0}_{4,0} = \frac{25}{2^9}m^4 + \frac{371}{2^6.3.5}m^5 + \frac{104\,023}{2^8.3^2.5^2}m^6$$
$$+ \frac{5\,561\,611}{2^8.3^3.5^3}m^7 + \frac{5\,298\,846\,601}{2^{14}.3^3.5^4}m^8 + \ldots,$$

$$x^{0'}_{4,0} = \frac{25}{2^9}m^4 + \frac{811}{2^7.3.5}m^5 + \frac{121\,549}{2^8.3^2.5^2}m^6 + \frac{3\,421\,109}{2^7.3^3.5^3}m^7 + \ldots,$$

$$\lambda^{0'}_{4,0} = \frac{201}{2^9}m^4 + \frac{649}{2^4.3.5}m^5 + \frac{647\,623}{2^8.3^2.5^2}m^6$$
$$+ \frac{31\,363\,361}{2^8.3^3.5^3}m^7 + \frac{82\,679\,012\,303^*}{2^{14}.3^4.5^4}m^8 + \ldots;$$

$$y^{0'}_{6,0} = \frac{769}{2^{13}.3}m^6 + \frac{157\,097}{2^{12}.3.5.7}m^7 + \ldots,$$

$$x^{0'}_{6,0} = \frac{299}{2^{13}}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{0'}_{6,0} = \frac{3\,715}{2^{12}.3}m^6 + \frac{664\,571}{2^{11}.3.5.7}m^7 + \ldots;$$

$$g_0 = 1 - \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{225}{2^5}m^3 - \frac{4\,071}{2^7}m^4 - \frac{265\,493}{2^{11}}m^5$$
$$- \frac{12\,822\,631}{2^{13}.3}m^6 - \frac{1\,273\,925\,965}{2^{16}.3^2}m^7$$
$$- \frac{66\,702\,631\,253^*}{2^{18}.3^3}m^8 - \frac{29\,726\,828\,924\,189^*}{2^{23}.3^4}m^9 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{0,1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3}m^2 + \frac{1\,035}{2^9}m^3 + \frac{12\,933}{2^{11}}m^4 + \frac{618\,911}{2^{15}}m^5 + \frac{7\,187\,759}{2^{15}.3}m^6 + \frac{1\,235\,127\,413}{2^{20}.3}m^7 + \ldots,$$

$$\sigma_0 = 1 - \frac{75}{2^8}m^3 - \frac{3\,013}{2^{10}}m^4 - \frac{280\,879}{2^{14}}m^5 - \frac{10\,742\,201}{2^{14}.3^2}m^6 - \frac{3\,362\,079\,109}{2^{19}.3^4}m^7 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{2,-1} = \frac{15}{2^3}m + \frac{67}{2^3}m^2 + \frac{48\,761}{2^9.3}m^3 + \frac{470\,887}{2^9.3^2}m^4 + \frac{128\,267\,143}{2^{14}.3^3}m^5 + \frac{2\,064\,622\,069}{2^{15}.3^4}m^6 + \frac{6\,155\,897\,818\,717}{2^{21}.3^6.5}m^7 + \frac{53\,393\,048\,083\,583}{2^{18}.3^6.5^2}m^8 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{2,-1} = -\frac{15}{2^4}m - \frac{199}{2^6}m^2 - \frac{31\,721}{2^{10}.3}m^3 - \frac{311\,311}{2^{10}.3^2}m^4 - \frac{107\,695\,621}{2^{15}.3^3}m^5 - \frac{84\,717\,323}{2^{11}.3^4}m^6 - \frac{12\,352\,910\,703\,241}{2^{22}.3^5.5}m^7 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{2,-1} = \frac{15}{2^3}m + \frac{263}{2^5}m^2 + \frac{48\,217}{2^9.3}m^3 + \frac{1\,880\,537}{2^{11}.3^2}m^4 + \frac{130\,463\,405}{2^{14}.3^3}m^5 + \frac{4\,389\,108\,607}{2^{16}.3^4}m^6 + \frac{1\,391\,770\,912\,969^*}{2^{21}.3^5}m^7 + \frac{389\,929\,802\,993\,113^*}{2^{23}.3^6.5}m^8 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{2,1} = \frac{7}{2^5}m^2 + \frac{17}{2^2.3}m^3 + \frac{1\,103}{2^6.3^2}m^4 + \frac{591\,361}{2^{12}.3^3}m^5 + \frac{19\,835\,681}{2^{14}.3^4}m^6 + \frac{13\,208\,276\,009}{2^{18}.3^5.5}m^7 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{2,1} = \frac{5}{2^5}m^2 + \frac{85}{2^5.3}m^3 + \frac{6\,103}{2^8.3^2}m^4 + \frac{635\,765}{2^{12}.3^3}m^5 + \frac{12\,445\,843}{2^{14}.3^4}m^6 + \frac{325\,461\,413}{2^{18}.3^5}m^7 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{2,1} = \frac{17}{2^4}m^2 + \frac{169}{2^4.3}m^3 + \frac{9\,577}{2^7.3^2}m^4 + \frac{896\,417}{2^{11}.3^3}m^5 + \frac{16\,232\,479}{2^{13}.3^4}m^6 + \frac{342\,449\,669^*}{2^{17}.3^5}m^7 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,-1} = \frac{105}{2^8} m^3 + \frac{1\,919}{2^9} m^4 + \frac{5\,241\,419}{2^{14}.3.5} m^5 + \frac{342\,843\,893}{2^{14}.3^2.5^2} m^6 + \frac{21\,387\,963\,091}{2^{19}.5^3} m^7 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{4,-1} = \frac{75}{2^8} m^3 + \frac{1\,353}{2^9} m^4 + \frac{3\,639\,257}{2^{14}.3.5} m^5 + \frac{40\,587\,119}{2^{13}.3.5^2} m^6 + \frac{459\,861\,461\,911}{2^{19}.3^2.5^3} m^7 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,-1} = \frac{255}{2^7} m^3 + \frac{7\,701}{2^9} m^4 + \frac{619\,755}{2^{13}} m^5 + \frac{456\,153\,881}{2^{15}.3^2.5} m^6 + \frac{194\,906\,017\,201^*}{2^{18}.3^2.5^2} m^7 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,1} = \frac{167}{2^{10}} m^4 + \frac{9\,697}{2^9.3.5} m^5 + \frac{2\,680\,877}{2^{11}.3^2.5^2} m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{4,1} = \frac{187}{2^{10}} m^4 + \frac{22}{3.5} m^5 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,1} = \frac{309}{2^8} m^4 + \frac{15\,403}{2^7.3.5} m^5 + \frac{14\,881\,477}{2^{11}.3^2.5^2} m^6 + \ldots$$

$$y^{(0)}_{6,-1} = \frac{2\,505}{2^{13}} m^5 + \frac{374\,141}{2^{15}.3} m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,-1} = \frac{2\,805}{2^{13}} m^5 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,-1} = \frac{4\,635}{2^{11}} m^5 + \frac{603\,559}{2^{13}.3} m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{6,1} = \frac{3\,971}{2^{13}.3} m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,1} = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,1} = \frac{17\,111}{2^{12}.3} m^6 + \ldots;$$

....

12. Dans ces formules, les nombres marqués d'un astérisque sont ceux qui diffèrent des coefficients correspondants donnés par Delaunay dans sa *Théorie de la Lune* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. XXVIII

et XXIX, sauf pour la valeur de g_0 que l'on trouve aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV). Comme je l'ai annoncé au début, ce sont tous les coefficients qui correspondent (en tenant compte de l'excentricité) aux termes d'un ordre supérieur au septième, et qui, par suite, résultent du Chap. X de l'œuvre de Delaunay, intitulé : *Recherches supplémentaires sur la longitude de la Lune*.

Je ferai remarquer, en outre, que le coefficient de m^8 dans $\lambda_{2,0}^{(0)}$ se trouve donné exactement dans la *Théorie de la Lune* de de Pontécoulant, et qu'en transformant convenablement les résultats donnés par M. Hill dans le Mémoire que j'ai déjà cité, on retrouve les mêmes valeurs que ci-dessus pour les quantités $\lambda_{2,0}^{(0)}$, $\lambda_{4,0}^{(0)}$, $\lambda_{6,0}^{(0)}$.

Je me propose de continuer très prochainement ces recherches en considérant, d'une part, d'autres inégalités de la longitude de la Lune non moins importantes, et, d'autre part, en étudiant, au point de vue du calcul numérique, les formules et développements en série que l'on rencontre dans ce Mémoire.

SUR

L'AIMANTATION DU NICKEL,

INFLUENCE DE LA LONGUEUR DES BARREAUX,

PAR M. G. BERSON,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Je me suis proposé de résoudre pour le nickel l'un des problèmes que M. Mascart a traités pour le fer il y a quelques années (1), c'est-à-dire de rechercher comment varie, dans un champ uniforme donné, l'intensité moyenne d'aimantation d'un cylindre de nickel placé parallèlement au champ quand varie le rapport de la longueur du cylindre à son diamètre. Le quotient de cette intensité moyenne A par la force du champ donne un coefficient moyen d'aimantation f, qui aurait pour limite le coefficient d'aimantation k caractérisant la susceptibilité magnétique du corps dans ce champ si le cylindre était infiniment long. L'intensité moyenne d'aimantation étant le quotient du moment magnétique M par le volume, le calcul de ce nombre A exige la détermination du moment magnétique.

2. Le moment magnétique M du barreau est mesuré par la méthode de Gauss, l'aimant étant placé horizontalement dans un plan perpendiculaire au méridien magnétique et passant par le centre du déclinomètre. La longueur de l'aimant du déclinomètre est de $3^{cm},15$. La plus grande longueur des barreaux sur lesquels j'ai expérimenté est de 80^{cm} et leur milieu était toujours placé à une distance de $91^{cm},3$ du milieu de l'aimant dévié. On peut, dans ces conditions, remplacer la distance des divers points du bar-

(1) *Journal de Physique*, 2e série, t. V, p. 293.

reau déviant aux pôles de l'aimant du déclinomètre par leur distance au centre de ce dernier : le moment du couple qui produit la déviation n'est altéré que de 0,0016 ou de beaucoup moins de $\frac{1}{500}$ de sa valeur par cette approximation. La formule qui donne M devient alors

$$M = \frac{H}{2} \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} \operatorname{tang} \alpha,$$

H étant la composante horizontale terrestre,
r la distance des centres des deux barreaux,
α la déviation,
$2l$ la distance des pôles de l'aimant déviant.

La distance de l'échelle au miroir du déclinomètre est de 376^{cm}; si donc δ est le déplacement lu sur l'échelle, correspondant à la déviation α, la formule deviendra

$$M = \frac{H}{2} \frac{1}{2 \times 376} \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} \delta.$$

Le nombre δ est déterminé par le pointé de trois élongations successives du déclinomètre.

La composante horizontale terrestre H est connue à la place même occupée par le déclinomètre, au moyen d'un petit barreau auxiliaire de moment magnétique m, par la détermination de mH et de $\frac{m}{H}$. Elle a été trouvée égale à 0,2480 C.G.S. Ce nombre élevé (l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* ne donne pour valeur de H à Toulouse que 0,2164) s'explique par le fait que mes expériences ont été effectuées dans un laboratoire du sous-sol de la Faculté des Sciences, dont le plafond est membré de fortes poutres d'un fer plus ou moins aciéré qui s'était certainement aimanté sous l'action de la Terre pendant qu'il était travaillé.

La longueur l a été déterminée de façons diverses. Pour certains barreaux ayant été déjà étudiés dans des recherches antérieures ([1]), l a été calculé d'après les formules représentant la distribution de la couche fictive sur les parois latérales et sur les bases terminales; c'est ainsi que les pôles

([1]) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. VIII, p. 476, et *Journal de Physique*, 2e série, t. V, p. 452.

ont été trouvés à une distance des sommets égale à

$0^{cm},511$	pour l'aimantation	totale,
$0,650$	»	résiduelle,
$0,225$	»	temporaire.

Pour d'autres, l a été calculé en mesurant le moment magnétique M à des distances différentes du déclinomètre. Pour deux distances r et r', on a les équations

$$\frac{2M}{H} = \frac{(r^2 - l^2)^2}{r} \tan g\alpha = \frac{(r'^2 - l^2)^2}{r'} \tan g\alpha';$$

l'égalité des deux derniers rapports fait connaître l.

Le champ uniforme employé est le champ intérieur d'une longue bobine de 130^{cm} de longueur et de 3^{cm} de diamètre, dont l'action propre était compensée par celle d'une autre bobine courte placée de l'autre côté du déclinomètre et traversée par le même courant. La compensation des bobines était toujours vérifiée avant et après les opérations sur chaque barreau. La bobine magnétisante est formée de trois couches de spires de 1030, 1022 et 1015 spires, ce qui donne comme nombre de spires par unité de longueur $n_1 = 25,65$. La force du champ est $F = 4\pi n_1 I$, I étant l'intensité du courant mesurée en unités C.G.S. par un galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval, placé sur un shunt et gradué.

3. J'ai opéré sur diverses sortes de nickel dans des champs variant de 0 à 146 C.G.S. Une partie de mes expériences a porté sur du fil de nickel de $0^{cm},135$ de diamètre, de densité 8,74 à 22°. C'est un nickel contenant un peu moins de 1 pour 100 de fer. Les tiges découpées dans ce fil avaient des longueurs croissant de 10 en 10 centimètres depuis 0 jusqu'à 80; les rapports des longueurs aux diamètres étaient donc de

74,07   148,15   222,22   296,30   370,38   444,44   518,53   592,70.

J'ai employé aussi des barreaux dont la section carrée a $0^{cm},2$ de côté et dont les longueurs sont de 9^{cm}, 18^{cm} et 27^{cm}. Ce métal a été obtenu par le laminage de cahiers de feuilles métalliques déposées par l'électrolyse. Aussi sa densité n'est-elle que de 7,03. Les rapports des longueurs aux diamètres des sections circulaires équivalentes sont de

39,88   79,76 et 119,64.

Ces différents échantillons de nickel ne sont pas chimiquement purs, surtout les premiers. La présence d'une petite quantité de substances étrangères modifie certainement leur susceptibilité magnétique; on sait que les alliages de fer et de nickel présentent, au point de vue magnétique, de curieuses singularités. Le regretté M. Debray, qui s'était intéressé à mes recherches, avait bien voulu me promettre de me donner, si cela lui était possible, du nickel pur; après des tentatives multiples et également infructueuses pour obtenir des lingots pouvant être amenés en barreaux par des procédés mécaniques, M. Debray me remit du nickel pur en poudre et en grenaille. J'ai construit des cylindres métalliques en tassant cette poudre et cette grenaille dans des tubes de verre de plusieurs calibres : c'était toujours le même nickel, recuit constamment à la même température de 340°, occupant toujours le même volume $10^{cmc},270$ sous des longueurs allant de $4^{cm},9$ à 71^{cm}; les rapports des longueurs aux diamètres sont de

3,000 6,458 28,34 62,24 et 165,44;

la densité est de 2,77.

4. *Aimantation totale.* — Pour les fils, les variations de l'intensité moyenne d'aimantation totale sont données par le Tableau suivant, dans lequel la première colonne contient les valeurs du champ F en unités C.G.S., et les autres colonnes les valeurs absolues de A.

Tableau I.

F.	10^{cm}.	20^{cm}.	30^{cm}.	40^{cm}.	50^{cm}.	60^{cm}.	70^{cm}.	80^{cm}.
18,32	71,7	86,8	96,6	102,2	106,8	108,7	111,6	113,6
36,64	163,2	186,3	199,7	207,8	211,3	214,9	218,8	223,9
54,95	234,6	246,4	255,3	257,7	264,6	268,9	267,8	268,2
73,27	259,4	266,7	274,4	276,3	285,9	289,2	288,3	291,0
91,59	276,0	280,9	288,9	289,2	298,9	301,9	302,1	305,1
109,91	290,6	296,8	300,1	305,2	307,5	308,6	310,5	313,3
128,23	303,4	304,8	306,3	310,9	312,4	313,1	315,3	316,6
146,53	308,4	309,9	311,4	313,4	314,7	315,2	317,1	317,6

On voit que :

1° Pour les petites forces, A croît rapidement avec la longueur de la tige;

2° Cet accroissement est de moins en moins rapide à mesure que la valeur de la force s'élève;

3° Cet accroissement est surtout marqué pour les tiges de petite longueur. Ainsi, dans un champ égal à 18,32, le rapport de l'accroissement de la valeur de A à sa valeur moyenne quand la longueur passe de 10^{cm} à 20^{cm} est de 0,190, tandis qu'elle n'est plus que de 0,011 quand on passe d'un fil de 70^{cm} à un fil de 80^{cm}.

Pour les barreaux carrés, dont la densité est moindre que celle des fils précédents, l'intensité moyenne d'aimantation est beaucoup plus petite.

Tableau II.

F.	9^{cm}.	18^{cm}.	27^{cm}.
18,32	7,73	8,007	11,57
36,64	16,46	18,25	24,50
54,95	36,28	36,51	46,96
73,27	59,79	59,56	70,43
91,59	76,92	77,67	87,79
109,91	91,70	91,92	100,38

Les nombres sont certainement un peu faibles pour le barreau de 18^{cm} dont un des bouts s'est légèrement effeuillé. Sous le bénéfice de cette remarque, les conclusions sont les mêmes que les précédentes.

Enfin, pour les barreaux constitués avec de la grenaille et de la poudre de nickel, l'allure générale du phénomène est encore la même, comme cela résulte du Tableau suivant :

Tableau III.

F.	4^{cm},9.	8^{cm},17.	21^{cm},9.	37^{cm},0.	71^{cm},0.
18,32	1,53	1,61	1,73	1,76	1,79
36,64	3,09	3,27	3,51	3,63	3,66
54,95	4,65	5,19	5,48	5,51	5,54
73,27	6,41	7,08	7,50	7,51	7,53
91,59	8,05	8,73	9,28	9,39	9,41
109,91	9,24	10,07	10,78	10,82	10,93

On peut remarquer que, en raison de la faible densité du métal, l'intensité moyenne d'aimantation varie faiblement d'un cylindre à l'autre, sauf pour les très courts barreaux dont la longueur n'est que le sextuple ou le triple du diamètre.

5. Si l'on considère d'autre part le rapport f de l'intensité moyenne d'aimantation totale à la force du champ de la bobine, $f = \frac{A}{F}$, on sait que

ce nombre, d'abord croissant, atteint bientôt un maximum pour tendre ensuite vers zéro quand la force magnétisante augmente indéfiniment. On trouve ci-dessous les Tableaux des valeurs de f correspondantes aux intensités d'aimantation des Tableaux précédents et qui, pour un même champ, leur sont évidemment proportionnelles. Le Tableau IV est relatif aux tiges de nickel de $0^{cm},135$ de diamètre.

Tableau IV.

F.	10cm.	20cm.	30cm.	40cm.	50cm.	60cm.	70cm.	80cm.
18,32	3,91	4,74	5,27	5,59	5,83	5,93	6,09	6,20
36,64	4,45	5,085	5,45	5,67	5,77	5,87	5,97	6,11
54,95	4,27	4,48	4,54	4,69	4,81	4,89	4,87	4,88
73,27	3,54	3,64	3,74	3,77	3,90	3,95	3,93	3,97
91,59	3,01	3,07	3,15	3,16	3,26	3,30	3,30	3,32
109,91	2,64	2,70	2,73	2,78	2,86	2,81	2,82	2,83
128,23	2,37	2,38	2,39	2,42	2,44	2,44	2,46	2,47
146,53	2,11	2,115	2,12	2,14	2,15	2,15	2,16	2,16

Le Tableau V se rapporte aux barreaux de section carrée.

Tableau V.

F.	9cm.	18cm.	27cm.
18,32	0,422	0,437	0,632
36,64	0,449	0,498	0,669
54,95	0,660	0,664	0,854
73,27	0,816	0,813	0,961
91,59	0,840	0,848	0,958
109,91	0,834	0,837	0,913

Enfin le Tableau VI donne les valeurs du coefficient f pour les cylindres de poudre de nickel.

Tableau VI.

F.	4cm,9.	8cm,17.	21cm,9.	37cm,0.	71cm,0.
18,32	0,0835	0,088	0,094	0,096	0,098
36,64	0,084	0,089	0,096	0,099	0,100
54,95	0,085	0,094	0,100	0,103	0,101
73,27	0,085	0,097	0,102	0,1025	0,103
91,59	0,085	0,095	0,101	0,102	0,103
109,91	0,084	0,092	0,098	0,098	0,099

On voit, à l'inspection de ces nombres, que pour les fils le maximum a

lieu beaucoup plus rapidement que pour les barreaux de faible densité. Ainsi, pour les fils dont la plus petite longueur est 10^{cm}, il est atteint dans un champ au plus égal à 41,5, tandis que, pour les barreaux carrés et les tubes, il ne se présente que dans des champs dépassant 70 et allant jusqu'au delà de 90.

Pour ces derniers cylindres, le coefficient f est faible, il ne dépasse guère $\frac{1}{10}$. Il en résulte que le phénomène se rapproche de celui des métaux peu magnétiques ou diamagnétiques : l'intensité d'aimantation est sensiblement proportionnelle à F, sauf pour les grandes valeurs de cette force; par suite, f varie très peu pour un même barreau et même, à l'exception des cylindres de petite longueur, change peu quand on passe d'un barreau à un autre. On peut présumer que la valeur maxima limite de f diffère peu de 0,103, qui serait ainsi le maximum du coefficient d'aimantation k du nickel sous cette forme et sous cette densité.

D'autre part, le maximum de la valeur de f se présente pour une force d'autant plus faible que le barreau est plus long. On peut déterminer approximativement cette force par la construction de la courbe d'aimantation à laquelle on mène la tangente issue de l'origine. Pour les fils de 10^{cm}, cette force est de 41,5, tandis que, pour le fil de 80^{cm}, elle n'est plus que de 25,5; pour les autres fils, les forces correspondantes au maximum de f s'échelonnent entre ces deux nombres.

Enfin, à mesure que s'abaisse cette force, la valeur du maximum de f s'élève : pour le fil de 10^{cm}, le maximum est de $\frac{18,95}{41,5} = 4,566$ et, pour le fil de 80^{cm}, il est de $\frac{17,08}{25,5} = 6,698$.

6. *Aimantation résiduelle.* — L'aimantation résiduelle du nickel présente, en général, les mêmes variations, mais plus accentuées que l'aimantation totale.

Tableau VII.

Fils de $0^{cm},135$ de diamètre.

F.	10^{cm}.	20^{cm}.	30^{cm}.	40^{cm}.	50^{cm}.	60^{cm}.	70^{cm}.	80^{cm}.
18,32	28,0	49,1	61,4	68,6	73,2	74,4	76,1	77,2
36,64	95,8	128,2	146,7	157,3	159,6	161,2	162,8	166,6
54,95	135,4	168,5	188,5	195,4	200,2	201,4	197,9	196,7
73,27	142,4	173,9	195,4	202,7	209,8	208,6	205,1	207,4
91,59	149,7	179,4	201,7	207,6	216,1	216,4	213,3	214,5
109,91	157,4	189,3	206,4	218,7	221,0	220,8	219,8	220,7
128,23	162,6	191,3	208,1	220,0	223,0	223,4	223,5	223,9
146,53	163,9	191,7	209,3	220,9	224,0	224,6	224,8	224,8

Tableau VIII.

Barreaux de section carrée.

F.	9cm.	15cm.	27cm.
18,32	3.36	4,49	8,855
36,64	6.72	9,61	18,73
54.95	21.84	23,07	36,78
73,27	42.00	43,91	55,17
91,59	55,94	59,77	70,84
109,91	67,70	71,46	81,74

Pour les cylindres de nickel en poudre, l'aimantation résiduelle est si faible que les erreurs d'observations peuvent être une fraction importante de sa valeur : nous n'en parlerons pas.

On peut faire sur le coefficient f relatif à l'aimantation résiduelle les mêmes remarques que dans le cas de l'aimantation totale.

Tableau IX.

F.	10cm.	20cm.	30cm.	40cm.	50cm.	60cm.	70cm.	80cm
18,32	1,53	2,68	3,35	3,74	4,00	4,06	4,15	4,21
36,64	2.62	3,50	4.00	4,29	4,36	4,40	4,44	4,55
54,95	2,46	3,07	3,43	3.56	3,64	3,67	3,60	3,58
73,27	1.94	2,37	2,67	2.77	2.80	2,85	2,80	2,83
91,59	1,63	1,96	2.20	2.27	2,36	2,36	2,33	2.34
109,91	1.43	1,72	1,88	1.99	2.01	2,01	2,00	2,01
128.23	1.27	1,49	1,62	1.72	1,74	1,74	1,74	1.75
146,55	1,12	1,31	1.43	1,51	1,53	1,53	1,53	1,53

7. *Aimantation temporaire.* — On conçoit l'accroissement continu des intensités d'aimantation totale et d'aimantation résiduelle avec la longueur du barreau. L'aimantation induite est, en effet, la somme des termes d'une série convergente à termes alternativement positifs et négatifs. Le premier terme serait l'aimantation uniforme due au champ uniforme de la bobine; le deuxième terme, de signe contraire, serait l'aimantation due à la force provenant de cette aimantation uniforme; le troisième terme, de même signe que le premier, résulterait de la force émanée du magnétisme qui correspond au deuxième, etc. Les deux premiers termes sont clairement d'une importance très prépondérante. Or le premier terme est le même pour les barreaux de toutes les longueurs et de toutes les sections, le deuxième dépend de la longueur et de la section. Pour des barreaux de même section, à une distance donnée d'une extrémité, la force provenant

de l'aimantation uniforme correspondant au premier terme de la série est d'autant plus petite que le barreau est plus long et, par suite, le deuxième terme est d'autant plus petit : d'où l'accroissement de l'aimantation induite avec la longueur des tiges placées dans un champ donné.

Le raisonnement ne s'applique plus à l'aimantation temporaire. Supposons, en effet, tout d'abord que, dans des fils de même section et de longueurs diverses, l'aimantation totale soit la même à partir des extrémités. La force démagnétisante en un point situé à une distance donnée du bout sera d'autant plus petite que le barreau sera plus long. Au moment précis où le courant de la bobine est interrompu, cette force démagnétisante existe seule et l'on conçoit que, conformément aux idées qui résultent des expériences de M. Ewing, les aimants moléculaires qui constituent le barreau reviennent vers une position d'équilibre d'autant plus éloignée de la précédente que cette force démagnétisante sera plus grande, c'est-à-dire que l'aimantation temporaire varie en sens contraire de la longueur de l'aimant. Toutefois, comme je l'ai montré, des barreaux placés dans le même champ prennent une aimantation totale qui est une fonction croissante du rapport de la longueur au diamètre : c'est ce qui explique que, pour les barreaux longs, l'aimantation temporaire cesse de diminuer quand la longueur augmente, et même devienne croissante, comme il résulte du Tableau X ([1]) relatif aux fils de nickel de $0^{cm},135$ de diamètre.

Tableau X.

F.	10cm.	20cm.	30cm.	40cm.	50cm.	60cm.	70cm.	80cm.
18,32	43,7	37,8	35,2	33,8	33,6	34,2	35,5	36,4
36,64	67,3	58,1	52,9	50,6	51,7	53,8	56,0	57,3
54,95	99,2	77,9	66,9	62,3	64,5	67,5	69,9	71,5
73,27	117,0	92,8	79,0	73,5	76,1	80,6	83,1	83,7
91,59	126,3	101,5	87,3	81,6	82,8	85,4	88,8	90,6
109,91	133,2	107,5	93,7	86,5	86,5	87,8	90,7	92,5
128,23	140,8	113,5	98,3	90,9	89,4	89,7	91,8	92,7
146,53	144,5	118,2	102,0	92,5	90,8	90,6	92,3	92,8

Quant au rapport f de l'aimantation temporaire à la force du champ, il

([1]) Les Tableaux X et XI ne portent que les différences des nombres homologues des Tableaux I et VII et des Tableaux IV et IX. Ils ne sont donnés ici que pour faciliter la lecture de ce travail.

atteint très vite son maximum; la force correspondante pour les fils de nickel est toujours inférieure à quinze unités.

Tableau XI.

F.	10cm.	20cm.	30cm.	40cm.	50cm.	60cm.	70cm.	80cm.
18,32	2,39	2,06	1,92	1,84	1,83	1,87	1,94	1,99
36,64	1,83	1,585	1,44	1,38	1,41	1,47	1,53	1,56
54,95	1,81	1,41	1,22	1,13	1,17	1,23	1,27	1,30
73,27	1,60	1,27	1,08	1,00	1,04	1,10	1,13	1,14
91,59	1,38	1,11	0,95	0,89	0,90	0,93	0,97	0,98
109,91	1,21	0,98	0,85	0,79	0,79	0,80	0,82	0,82
128,23	1,10	0,89	0,77	0,70	0,70	0,70	0,72	0,72
146,53	0,99	0,805	0,70	0,63	0,62	0,62	0,63	0,63

8. Je ferai remarquer, en terminant, que les coefficients qui caractérisent les échantillons de nickel soumis à mes expériences décroissent beaucoup plus vite que la densité des tiges, ce qui ne permet malheureusement de rien inférer des nombres trouvés sur le nickel en poudre pour le nickel pur en lingot.

Il existe d'ailleurs une concordance remarquable entre les conclusions de mon étude expérimentale sur le nickel et les résultats correspondants que M. Mascart a déduits de ses recherches sur l'aimantation du fer.

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. CH. HERMITE,

Professeur d'Algèbre supérieure à la Faculté des Sciences de Paris.

Extrait des Mémoires de l'Académie tchèque de Prague.

Dans le § 32 des *Fundamenta,* Jacobi a fait la remarque que, si l'on désigne par λ l'un des modules relatifs à la transformation d'ordre impair n, par λ' son complément, on a, entre les fonctions complètes Λ, Λ' analogues à K et K' et le multiplicateur M, les relations suivantes

$$\alpha\Lambda + i\beta\Lambda' = \frac{a\mathrm{K} + ib\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

$$\alpha'\Lambda' + i\beta'\Lambda = \frac{a'\mathrm{K} + ib'\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

où a, a', α, α' sont des nombres impairs, b, b', β, β' des nombres pairs satisfaisant aux conditions $aa' + bb' = n$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1$. Puis il ajoute en note : *Accuratior numerorum a, a', b, b', ... determinatio pro singulis eiusdem ordinis transformationibus gravibus laborare difficultatibus videtur. Immo hæc determinatio, nisi egregie fallimur, maxime a limitibus pendet, inter quos modulus k versatur, ita ut pro limitibus diversis plane alia evadat : quod quam intricatam reddat questionem, expertus cognoscet, etc.* C'est dans le but d'éviter ces difficultés que j'ai modifié le point de vue du grand géomètre dans la théorie de la transformation ; j'ai suivi une marche inverse : je me suis donné *a priori* les relations entre K, K', Λ, Λ' pour en conclure les formules analytiques de la transformation que Jacobi, au contraire, établit en premier lieu, et j'ai posé la question comme il suit (¹) :

(¹) *Cours de la Faculté des Sciences de Paris,* 4ᵉ édition, p. 265.

Soient, avec une légère modification des notations employées dans les *Fundamenta*,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2\varphi}}, \qquad L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2\varphi}}$$

les mêmes quantités que K et K', relatives à un autre module l et à son complément $l' = \sqrt{1 - l^2}$. On propose de déterminer ce module, ainsi que la constante M, de telle sorte que $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ admettent pour périodes 2K et $2i$K', et s'expriment, par conséquent, au moyen des fonctions doublement périodiques de module k.

Nous ferons, pour cela,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{K}{M} &= aL + ibL', \\ \frac{iK'}{M} &= cL + idL', \end{aligned}\right.$$

a, b, c, d étant des nombres entiers quelconques, avec la condition que le déterminant $ad - bc$ soit positif, afin que la partie réelle du quotient $\frac{L'}{L}$ soit positive. On aura ainsi les égalités

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x + 2K}{M}, l\right) = (-1)^a \operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x + 2K}{M}, l\right) = (-1)^{a+b} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x + 2K}{M}, l\right) = (-1)^b \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

puis

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x + 2iK'}{M}, l\right) = (-1)^c \operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x + 2iK'}{M}, l\right) = (-1)^{c+d} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x + 2iK'}{M}, l\right) = (-1)^d \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right).$$

Cela étant, la recherche des formules de transformation repose en entier sur les propriétés de la fonction

$$\Phi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) e^{\frac{i\pi b x^2}{4KLM}}.$$

qui consistent dans les relations suivantes

$$\Phi(x+2\mathrm{K}) \quad = (-1)^{(a+1)b}\,\Phi(x),$$
$$\Phi(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)\,e^{-\frac{in\pi(x+i\mathrm{K}')}{\mathrm{K}}}.$$

Ce sont aussi ces égalités dont je ferai usage pour l'objet de cette Note, et j'indiquerai d'abord une méthode facile pour y parvenir.

Je remarque, à cet effet, qu'ayant

$$\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}},\ l\right) = \sum (-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{\mathrm{LM}} - \frac{\pi m^2 \mathrm{L}'}{\mathrm{L}}},$$
$$(m = 0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\quad \ldots),$$

nous pouvons écrire

$$\Phi(x) = \sum (-1)^m e^{i\pi\varphi(x,\,m)},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi(x,m) = \frac{bx^2}{4\mathrm{KLM}} + \frac{mx}{\mathrm{LM}} + \frac{im^2\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}.$$

Remplaçons maintenant dans le dernier terme $i\mathrm{L}'$ par la valeur tirée de la première des équations (A) : on obtient ainsi

$$\varphi(x,m) = \frac{bx^2}{4\mathrm{KLM}} + \frac{mx}{\mathrm{LM}} + \frac{m^2(\mathrm{K}-a\mathrm{LM})}{b\mathrm{LM}}$$

ou bien

$$\varphi(x,m) = \frac{(bx+2m\mathrm{K})^2}{4b\mathrm{KLM}} - \frac{m^2 a}{b}.$$

De cette nouvelle expression résulte immédiatement que l'on a

$$\varphi(x+2\mathrm{K},m) = \varphi(x,m+b) + (2m+b)a;$$

le changement de x en $x+2\mathrm{K}$ se trouve donc ramené à celui de m en $m+b$ qui peut toujours se faire dans une série s'étendant à toutes les valeurs de l'entier m. Nous parvenons de cette manière, en ayant égard au facteur $(-1)^m$, à la première des égalités à démontrer.

La seconde découle de l'identité

$$\varphi(x,m) + \frac{nx^2}{4i\mathrm{KK}'} = \frac{(dx+2im\mathrm{K}')^2}{4id\mathrm{K}'\mathrm{LM}} - \frac{m^2c}{d};$$

on l'établit en transformant comme il suit la quantité

$$\varphi(x, m) + \frac{nx^2}{4iKK'} = \frac{ibK' + nLM}{4iKK'LM} x^2 + \frac{mx}{LM} + \frac{im^2 L}{L}.$$

Je tire d'abord des équations (A), par l'élimination de L', cette expression

$$ibK' + nLM = dK,$$

au moyen de laquelle le premier terme devient $\frac{dx^2}{4iK'LM}$; je remplace ensuite, dans le dernier terme, iL' par la valeur tirée de la seconde de ces égalités. Nous obtenons ainsi

$$\varphi(x, m) + \frac{nx^2}{4iKK'} = \frac{dx^2}{4iK'LM} + \frac{mx}{LM} + \frac{m^2(iK' - cLM)}{dLM},$$

ce qui démontre le résultat annoncé. On en conclut, comme tout à l'heure,

$$\Phi(x + 2iK') e^{\frac{n(x+2iK')^2}{4iKK'}} = (-1)^{(c+1)d} \Phi(x) e^{\frac{nx^2}{4iKK'}}$$

et, en simplifiant,

$$\Phi(x + 2iK') = (-1)^{(c+1)d} \Phi(x) e^{-\frac{ni\pi(x+iK')}{K}}:$$

c'est la relation qu'il s'agissait de démontrer.

De là résulte immédiatement que, si l'on pose

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

les fonctions holomorphes $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ satisfont à des relations analogues, et il s'ensuit que les quatre quotients

$$P(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$Q(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$$

vérifient les égalités suivantes, qui sont d'une grande importance :

$$P(x+2K) = (-1)^{ab+a+b} P(x),$$
$$P(x+2iK') = (-1)^{cd+c+d+n} P(x),$$

$$Q(x+2K) = (-1)^{ab+a} Q(x),$$
$$Q(x+2iK') = (-1)^{cd+c+n} Q(x),$$

$$R(x+2K) = (-1)^{ab} R(x),$$
$$R(x+2iK') = (-1)^{cd+n} R(x),$$

$$S(x+2K) = (-1)^{ab+b} S(x),$$
$$S(x+2iK') = (-1)^{cd+d+n} S(x).$$

Ces quantités sont donc des fonctions doublement périodiques ayant un pôle unique $x = iK'$, et, sauf un facteur constant qui reste indéterminé, elles s'expriment sous forme entière au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ [1]. Nous en donnerons une expression différente qui s'obtient, en introduisant les fonctions de M. Weierstrass, définies par les relations

$$\mathrm{Al}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} e^{-\frac{Jx^2}{2K}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_1 = \frac{H(x)}{H'(0)} e^{-\frac{Jx^2}{2K}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_2 = \frac{H_1(x)}{H_1(0)} e^{-\frac{Jx^2}{2K}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_3 = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)} e^{-\frac{Jx^2}{2K}}.$$

La constante J désigne dans ces formules l'intégrale complète de seconde espèce, et l'on a, comme on sait,

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx.$$

Posons, afin de passer au module l,

$$J_1 = \int_0^L l^2 \operatorname{sn}^2(x, l) \, dx,$$

(1) *Cours d'Analyse*, p. 281.

nous pourrons écrire

$$\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right)}{\Theta(0, l)} e^{-\frac{J_1 x^2}{2LM^2}}.$$

Soit enfin

$$(B) \qquad N = \frac{J_1}{LM^2} - \frac{nJ}{K} + \frac{i\pi b}{2KLM},$$

au lieu du quotient $\frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$, on sera amené, en déterminant par la condition $S(0) = 1$ le facteur arbitraire qui entre dans $S(x)$, à la nouvelle formule

$$S(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M}, l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

et les relations

$$\mathrm{sn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)},$$

$$\mathrm{cn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)},$$

$$\mathrm{dn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}$$

nous donneront pareillement

$$P(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M}, l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

$$Q(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M}, l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

$$R(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M}, l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}}.$$

La quantité N qui est mise en évidence dans ces expressions me semble appeler l'attention et avoir dans la théorie de la transformation un rôle important. Aux équations algébriques entre k et l, entre le multiplicateur M et le module doivent, en effet, s'ajouter celles qu'on peut former entre N et k; j'ai essayé d'ouvrir la voie à ces nouvelles recherches par les remarques qui vont suivre.

En premier lieu, j'établirai les relations entre les deux fonctions complètes de seconde espèce, qui correspondent aux égalités

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$
$$\frac{iK'}{M} = cL + idL'.$$

Je remarque d'abord que, si l'on pose $ad - bc = n$, on en déduit

$$nL = \frac{dK - ibK'}{M},$$
$$inL' = \frac{-cK + iaK'}{M}.$$

de sorte qu'en tirant de l'équation (B)

$$\frac{J_1}{M} = \frac{nJLM}{K} - \frac{i\pi b}{2K} + LMN,$$

nous trouvons

$$\frac{J_1}{M} = \left(d - \frac{ibK'}{K}\right)J - \frac{i\pi b}{2K} + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

J'introduis maintenant la seconde fonction complète de seconde espèce en employant la relation

$$J'K - JK' = \frac{\pi}{2};$$

je remplace, à cet effet, $\frac{\pi}{2K}$ par $J' - \frac{JK'}{K}$, et il vient, après une réduction facile,

$$\frac{J_1}{M} = dJ - ibJ' + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

C'est la première relation que je voudrais obtenir; une autre semblable, qui concerne $\frac{J'_1}{M}$, se conclut de l'égalité

$$J'_1 L - J_1 L' = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{J_1 L'}{LM} + \frac{\pi}{2LM},$$

en éliminant J_1 au moyen de l'équation (B). Nous substituerons donc la

valeur

$$\frac{J_1}{LM} = \frac{nJM}{K} + MN - \frac{i\pi b}{2KL},$$

ce qui donne

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{nL'JM}{K} + LMN + \frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi bL'}{2KL}.$$

Cela étant, si l'on écrit d'abord

$$\frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi bL'}{2KL} = \frac{\pi(K - ibL'M)}{2KLM}$$

et qu'ensuite on remplace $K - ibL'M$ par aLM, et $L'M$ par $\frac{-cK + iaK'}{in}$, cette expression devient

$$\begin{aligned} \frac{iJ'_1}{M} &= \left(-c + \frac{iaK'}{K}\right)J + (-cK + iaK')\frac{N}{n} + \frac{ia\pi}{2K} \\ &= -cJ + ia\left(\frac{JK'}{K} + \frac{\pi}{2K}\right) + (-cK + iaK')\frac{N}{n} \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{iJ'_1}{M} = -cJ + iaJ' + (-cK + iaK')\frac{N}{n}.$$

Il importe d'observer que dans ces résultats la quantité N, comme nous allons l'établir, est une fonction algébrique du module. Considérons, pour en donner un exemple, le cas simple de la transformation du second ordre; au théorème II du § 37 des *Fundamenta,* qu'en remplaçant q par q^2, les quantités k, K et K' deviennent $\frac{1-k'}{1+k'}$, $\frac{1+k'}{2}K$, $(1+k')K'$, nous ajouterons que J et J' se changent en $\frac{1}{1+k'}J - \frac{1}{2}(1-k')K$ et $\frac{1}{1+k'}J - (1-k')K$.

On remarquera encore que les relations auxquelles nous venons de par- peuvent être présentées sous une forme plus simple; en se rappelant posé $ad - bc = n$, on en déduit aisément les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{aJ_1 + ibJ'_1}{M} &= nJ + KN, \\ \frac{cJ_1 + idJ'_1}{M} &= inJ' + iK'N, \end{aligned}\right.$$

r les conséquences.

Multiplions la première par J′, la seconde par J, et retranchons membre à membre, on obtiendra d'abord cette nouvelle expression de N, à savoir

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{M}}[\mathrm{J}'(a\mathrm{J}_1 + ib\mathrm{J}'_1) + i\mathrm{J}(c\mathrm{J}_1 + id\mathrm{J}'_1)]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{M}}[a\mathrm{J}'\mathrm{J}_1 - d\mathrm{J}\mathrm{J}'_1 + i(b\mathrm{J}'\mathrm{J}'_1 - c\mathrm{J}\mathrm{J}_1)],$$

où n'entrent que les intégrales complètes de seconde espèce.

Soient ensuite

$$\mathrm{U} = a\mathrm{L} + ib\mathrm{L}',$$
$$\mathrm{V} = a\mathrm{J}_1 + ib\mathrm{J}_1,$$

on a ces deux relations

$$ll'^2\frac{d\mathrm{U}}{dl} = l^2\mathrm{U} - \mathrm{V},$$

$$ll'^2\frac{d\mathrm{V}}{dl} = l^2(\mathrm{U} - \mathrm{V}),$$

que je vais employer pour différentier, par rapport à k, l'égalité $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} = a\mathrm{L} + ib\mathrm{L}'$ ou bien $\mathrm{K} = \mathrm{MU}$.

Nous trouvons ainsi

$$(k^2\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{dk}{kk'^2} = \mathrm{U}\,d\mathrm{M} + \mathrm{M}(l^2\mathrm{U} - \mathrm{V})\frac{dl}{ll'^2};$$

cela étant, j'exprime au moyen de J et K le second membre, en remplaçant U et V par les valeurs

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}},$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{M}(n\mathrm{J} + \mathrm{KN}).$$

Ce calcul nous donne

$$(k^2\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{dk}{kk'^2} = \frac{\mathrm{K}\,d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + [l^2\mathrm{K} - \mathrm{M}^2(n\mathrm{J} + \mathrm{KN})]\frac{dl}{ll'^2},$$

ce qui est une relation linéaire homogène entre J et K. On aurait évidemment le même résultat en J′ et K′, en posant

$$\mathrm{U} = c\mathrm{L} + id\mathrm{L}',$$
$$\mathrm{V} = c\mathrm{J} + id\mathrm{J}',$$

pour différentier l'égalité $i\mathrm{K}' = \mathrm{M}(c\mathrm{L} + id\mathrm{L}')$; il faut donc que les coef-

ficients de J et K soient séparément nuls, le déterminant J'K — JK' étant différent de zéro. Nous avons, par conséquent,

$$\frac{dk}{kk'^2} = n\mathrm{M}^2 \frac{dl}{ll'^2},$$

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,dl}{l'^2} - \mathrm{M}^2\mathrm{N}\frac{dl}{ll'^2}.$$

La première de ces relations a été découverte par Jacobi et donnée dans le § 32 des *Fundamenta;* on sait qu'elle est d'une importance capitale dans la théorie de la transformation. Elle permet d'écrire la seconde sous la forme

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,dl}{l'^2} - \frac{\mathrm{N}\,dk}{nkk'^2},$$

et nous en tirons l'expression suivante qui est purement algébrique, comme nous l'avons annoncé,

$$\mathrm{N} = nkk'^2 \mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}k'}{l'};$$

je vais en faire quelques applications.

Je considère d'abord le cas de la transformation du second ordre où l'on a

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+k}.$$

On en conclut aisément

$$\left(\frac{\mathrm{M}k'}{l'}\right)^2 = \frac{1+k}{1-k};$$

nous avons donc

$$\mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}k'}{l'} = \frac{1}{k'^2},$$

ce qui donne immédiatement

$$\mathrm{N} = 2k.$$

En passant au cas de $n = 3$, j'emploierai les expressions des deux modules et du multiplicateur qu'obtient Jacobi dans le § 13 des *Fundamenta,*



à savoir

$$k^2 = \frac{(2+x)x^3}{1+2x},$$

$$l^2 = \frac{(2+x)^3 x}{(1+2x)^3},$$

$$M = \frac{1}{1+2x}.$$

On en tire d'abord, par un calcul facile,

$$k'^2 = \frac{(1-x^2)(1+x)^2}{1+2x},$$

$$l'^2 = \frac{(1-x^2)(1-x)^2}{(1-2x)^3},$$

d'où

$$\frac{k'}{l'} = \frac{(1+x)(1+2x)}{1-x}$$

et, par conséquent,

$$\frac{Mk'}{l'} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Ayant ainsi la formule

$$N = 3kk'^2 \frac{d\log\frac{1+x}{1-x}}{dk},$$

nous écrirons d'abord

$$N = 6kk'^2 \frac{dx}{dk}\,\frac{1}{1-x^2}.$$

En remarquant ensuite que l'on a

$$3kk'^2 \frac{dx}{dk} = (1-x^2)(2x+x^2),$$

nous parvenons à l'expression suivante

$$N = 2(2x+x^2).$$

On en conclut, si l'on résout par rapport à x,

$$x = -1 + \sqrt{1+\tfrac{1}{2}N},$$

et, en substituant dans la valeur de k^2, on trouve l'équation entre N et k^2.

à laquelle nous voulions parvenir, à savoir

$$\left(\frac{N}{2}\right)^4 - 6k^2\left(\frac{N}{2}\right)^2 - (4k^2 + 4k^4)\frac{N}{2} - 3k^4 = 0.$$

Nous rapprocherons ce résultat de la formule

$$\operatorname{sn} 3x = \frac{3 - (4 + 4k^2)\operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^4 x - k^4 \operatorname{sn}^8 x}{1 - 6k^2 \operatorname{sn}^4 x + (4k^2 + 4k^4)\operatorname{sn}^6 x - 3k^4 \operatorname{sn}^8 x};$$

en considérant le numérateur, elle fait voir sur-le-champ que l'on a

$$N = -2k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2mK - 2niK'}{3},$$

m et n étant deux entiers quelconques.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

PAR M. BRIOSCHI.

Rome, 4 décembre 1892.

Voici quelques réflexions relatives à la quantité N, qui découlent de votre relation

$$N = nkk'^2 D_k \log \frac{Mk'}{l'}.$$

Soit, en supposant n impair,

$$x = \sqrt{k}\operatorname{sn}(u, k), \qquad y = \sqrt{l}\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right),$$

on a

$$y = \frac{U}{V}$$

ou

$$U = x\left(Bx^{n-1} + B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{\frac{n-3}{2}} x^2 + B_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

$$V = B + B_1 x^2 + \ldots + B_{\frac{n-3}{2}} x^{n-3} + B_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}.$$

On sait que

$$B = \sqrt{\frac{l'}{Mk'}};$$

par conséquent votre valeur de N peut s'écrire

$$N = -2nkk' D_k \log B.$$

Mais de l'équation aux différences partielles de Jacobi, à laquelle satisfont U et V, on tire

$$N = 2k \frac{B_1}{B};$$

de là résulte l'expression

$$N = -2k^2 \sum \operatorname{sn}^2(2s\omega, k)$$
$$\left(s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right),$$

où j'ai fait

$$\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}.$$

Dans mon travail [*Die Auflösung der Gleichungen von fünften Graden* (*Mathematische Annalen*, t. XIII, p. 111)], j'avais considéré les équations en $\frac{B_1}{B} = \nu$.

J'en ai donné deux, pour $n = 3$,

$$\nu^4 - 6\nu^2 - 4\frac{1+k^2}{k}\nu - 3 = 0;$$

c'est la vôtre, pour $n = 5$,

$$\nu^6 - 60\nu^4 - 160\alpha\nu^3 - 80(1+2\alpha^2)\nu^2 - 64\alpha(\alpha^2+2)\nu^2 - 80\alpha^2 = 0.$$

En posant $\alpha = \frac{1+k^2}{k}$, et par la méthode que j'ai indiquée, on calculerait facilement d'autres cas. Mais ces équations en ν n'ont pas la propriété caractéristique de celles que j'ai nommées *jacobiennes*.

SUR

LA DENSITÉ CRITIQUE

ET LE THÉORÈME DES ÉTATS CORRESPONDANTS,

PAR M. E. MATHIAS,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Si l'on porte en ordonnées les deux sortes de densités d'un corps (liquide et vapeur saturée) et en abscisses les températures, les deux courbes obtenues se raccordent à la température critique; l'ensemble forme une courbe unique, telle que le lieu des milieux des cordes parallèles à l'axe des coordonnées est une *droite*. Ce résultat, annoncé par MM. Cailletet et Mathias [1], vérifié sur l'acide sulfureux dans un intervalle de 156°, a été confirmé récemment par M. Amagat [2]. Mais, sauf pour l'acide sulfureux, la vérification n'a porté que sur des intervalles de température peu étendus (30° à 60°), et l'on peut craindre que le diamètre rectiligne ne soit qu'une *approximation*.

D'autre part, si l'on pose avec M. Van der Waals

$$p = \varepsilon\pi, \qquad v = n\varphi, \qquad T = 273 + t = m\Theta,$$

l'*isotherme réduite* (1), que l'on déduit de son équation des fluides,

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{n^2}\right)(3n - 1) = 8m \tag{1}$$

montre que, à la limite de l'état liquide (m voisin de zéro), n est voisin de $\frac{1}{3}$ pour l'état liquide, et indéfiniment grand pour la vapeur saturée [3];

(1) CAILLETET et MATHIAS, *Comptes rendus*, t. CII, mai 1886, et t. CIV, juin 1887.

(2) AMAGAT, *Comptes rendus*, t. CXIV, février 1892.

(3) M. Van der Waals a montré qu'on tire le même résultat de l'équation des fluides de

c'est ce que Ziloff paraît avoir remarqué le premier ([1]) sans y avoir, d'ailleurs, non plus que Nadejdin ([2]), attaché d'importance. Il s'ensuit que la densité d'un liquide doit tendre vers le triple de la densité critique quand on s'éloigne le plus possible de la température critique, et j'ai montré dans un Mémoire antérieur ([3]) qu'il paraît en être ainsi, *bien que l'équation des fluides de M. Van der Waals, et, par suite, l'isotherme réduite qui en est la conséquence, ne représentent pas du tout l'état liquide pour m voisin de zéro.*

I. Les récentes expériences de M. Sydney Young ([4]) permettent de donner de la *loi du diamètre rectiligne* une démonstration définitive, puisqu'il s'agit des corps les plus divers, au nombre de *douze*, et que les intervalles de températures atteignent 300° et même 325° (*benzine monochlorée*).

J'ai, au moyen des *volumes spécifiques moléculaires* donnés par M. Young, calculé la demi-somme des densités ([5]) pour chaque corps à un grand nombre de températures; puis j'ai déterminé le diamètre par deux points ([6]) et j'ai comparé les ordonnées observées et calculées.

Les Tableaux suivants donnent cette vérification pour les douze corps étudiés par M. Young. Les températures absolues de la première colonne sont relatives à la *benzine monofluorée;* les nombres de chaque couple de lignes horizontales, pour les autres corps, se rapportent à des températures correspondantes. Θ et Δ désignent la température absolue et la densité critiques.

Clausius, moyennant une légère modification dans le changement des variables, et j'ai montré moi-même (*Ann. de Toulouse*, 1891) qu'il en était de même avec une équation plus générale que celle de Clausius.

([1]) ZILOFF, *Jour. de la Soc. phys. chim. russe*, t. XIV, p. 169.

([2]) NADEJDIN, *Exner's Repertorium*, t. XXIII, p. 713; 1887.

([3]) E. MATHIAS, *Ann. de Toulouse*, 1891.

([4]) SYDNEY YOUNG, *Phil. Mag.* [5], t. XXXIII, février 1892.

([5]) Rapportées à l'eau à 4° ou mieux au gramme. Pour la plupart des corps étudiés par M. S. Young, aux températures correspondantes inférieures à 367°,3 (*benzine monofluorée*), le volume spécifique moléculaire de la vapeur saturée n'a pas été déterminé. Dans ces conditions, j'ai calculé, d'une façon approchée, la très faible densité de la vapeur saturée par extrapolation.

([6]) Il serait préférable de déterminer le diamètre rectiligne par la méthode des moindres carrés et en faisant usage de toutes les expériences : c'eût été trop pénible dans le cas présent.

I.

T.		C^6H^6.	C^6H^5Fl.	C^6H^5Cl.	C^6H^5Br.	C^6H^5I.	$CH^3.COOH$.
272°,25	obs....	0,4500	0,5237	0,5435	0,7255	0,87144	0,5265
	calc ...	Admis.	0,5218	0,5462	0,7266	Admis.	0,5295
320,25	obs....	0,4253	0,4948	0,51616	0,68649	0,82357	0,4992
	calc ...	0,4256	0,4939	Admis.	Admis.	0,82350	0,4998
367,30	obs....	0,4008	0,4677	0,4868	0,6478	0,7768	0,4706
	calc ...	0,4017	0,4668	0,4868	0,6472	0,7766	0,4708
410,4	obs....	0,3785	0,44157	0,4601	0,6119	0,73362	0,44413
	calc ...	0,3799	Admis.	0,4599	0,6112	Admis.	Admis.
460,4	obs....	0,3534	0,4119	0,4286	0,56934	»	0,4142
	calc ...	0,3545	0,4125	Admis.	Admis.	»	0,4132
519,7	obs....	0,32405	0,3776	»	»	»	0,3761
	calc ...	Admis.	Admis.	»	»	»	Admis.
550,0	obs....	0,3092	0,3598	»	»	»	0,3563
	calc ...	0,3088	0,3601	»	»	»	0,3576
Θ = 559,55	Δ	0,3037	0,3543	0,3661	0,4857	0,5838	0,3514

II.

T.		$SnCl^4$.	CCl^4.	$(C^2H^5)^2O$.	$CH^3.OH$.	$C^2H^5.OH$.	$C^3H^7.OH$.
272°,25	obs....	1,1199	»	»	»	»	»
	calc ...	Admis.	»	»	»	»	»
289,3	obs....	1,0967	0,80251	»	»	»	0,408
	calc ...	1,0974	Admis.	»	»	»	0,421
320,25	obs....	1,0549	0,7734	»	0,3956	0,3937	0,3960
	calc ...	1,0566	0,7743	»	0,4046	0,4019	0,4051
410,4	obs....	0,93515	0,6895	0,33087	0,3573	0,3559	0,3574
	calc ...	0,9378	0,6923	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.
460,4	obs....	0,8707	0,6457	0,3079	0,3330	0,3309	0,3322
	calc ...	0,8719	0,6468	0,3083	0,3310	0,3304	0,3309
519,7	obs....	0,7938	0,5922	0,2812	0,2994	0,2997	0,29905
	calc ...	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.
550,0	obs....	»	0,5660	0,2659	0,2789	0,2811	0,2817
	calc ...	»	0,5649	0,2676	0,2836	0,2844	0,2831
Θ = 559,55	Δ......	0,7413	0,5558	0,2631	0,2784	0,2793	0,2778

La vérification de la loi du diamètre est pour ainsi dire absolue pour tous les corps étudiés; cependant, les trois alcools méthylique, éthylique et propylique donnent, à la température la plus basse des expériences (*voir* les Tableaux VII et IX du Mémoire de M. Young), une différence moyenne d'un peu plus de 2 pour 100 entre les nombres observés et cal-

culés ([1]); la vérification est parfaite dans un intervalle d'environ 180° à partir de la température critique.

Les physiciens qui se sont occupés récemment de la détermination expérimentale des deux sortes de densités, MM. Battelli, Amagat et Young, ont conclu à l'existence d'une limite commune pour les deux densités à la température critique; d'après la loi du diamètre, il s'ensuit nécessairement que la densité critique est égale à l'ordonnée du diamètre qui correspond à la température critique, comme l'ont indiqué MM. Cailletet et Mathias (mai 1886). Les nombres Δ de la dernière ligne horizontale des deux Tableaux précédents sont donc les *densités critiques* des corps étudiés.

2. Si les équations de Van der Waals ou de Clausius, qui relient l'état liquide à l'état gazeux, étaient rigoureuses, il n'y aurait aucune différence à comparer les deux sortes de densités des corps à des *températures correspondantes* ou à des *pressions correspondantes;* il n'y aurait, en effet, dans $f(p, v, t) = 0$, qu'un simple changement de variables. Mais il n'en est pas ainsi, et, d'après M. S. Young ([2]), il est nécessaire de comparer les substances différentes, non seulement à des *températures correspondantes,* mais aussi à des *pressions correspondantes.* Il ressort même du travail de ce physicien que, dans cette seconde manière de voir, la comparabilité des corps est plus grande, particulièrement en ce qui concerne la densité de la vapeur saturée.

Je me suis donc proposé de chercher si le diamètre des densités, comparées à des pressions correspondantes, est rectiligne. La *benzine monofluorée* étant toujours le terme de comparaison, j'ai calculé ([3]) les densités des corps sous des pressions qui correspondent à celles de la vapeur saturée de C^6H^5Fl aux températures marquées dans les Tableaux I et II de ce Mémoire. Comme précédemment, j'ai déterminé les diamètres par deux points ([4]). J'ai constaté que ces nouveaux diamètres sont rectilignes dans toute leur longueur, sauf pour les alcools, et qu'ils sont nettement différents des précédents quoique souvent très voisins d'eux. D'après la manière

---

([1]) L'eau présente également le cas d'un diamètre curviligne.

([2]) S. Young, *loco citato*, p. 155.

([3]) D'après les Tableaux VI et VIII du Mémoire de M. Young.

([4]) Ces deux points correspondent à deux pressions de la *benzine monofluorée*, et le Tableau IV du Mémoire de M. S. Young me donnait les points d'ébullition des corps sous les pressions correspondantes; le diamètre était ainsi déterminé en fonction de la température.

même dont le calcul du diamètre relatif aux pressions correspondantes est fait, il est évident que, pour la *benzine monofluorée*, les deux sortes de diamètres coïncident. L'ordonnée du diamètre de seconde espèce correspondant à la pression critique fournit une nouvelle valeur de la densité critique Δ. Si cette quantité physique est bien déterminée, les deux valeurs de Δ doivent coïncider; c'est ce qui se vérifie de la façon la plus remarquable. La moyenne de ces deux valeurs fournit donc, à un très haut degré d'approximation, la valeur de la densité critique.

Dans les Tableaux suivants, π et Δ désignent la pression et la densité critiques.

III.

P.		C^6H^6.	C^6H^5Cl.	C^6H^5Br.	C^6H^5I.	$CH^3.COOH$.	$SnCl^4$.
20mm	obs....	0,4502	0,5453	0,72515	0,87091	0,5174	1,1162
	calc ...	Admis.	0,5462	0,7267	Admis.	Admis.	Admis.
200	obs....	0,4270	0,51642	0,68702	0,8242	0,4886	1,0526
	calc ...	0,4263	Admis.	Admis.	0,8238	0,4874	1,0536
3000	obs....	0,3799	0,4599	0,6115	0,73344	0,4344	0,9335
	calc ...	0,3803	0,4597	0,6108	Admis.	0,4332	0,9362
8000	obs....	0,3544	0,42860	0,65959	»	0,4067	0,8702
	calc ...	0,3549	Admis.	Admis.	»	0,4051	0,8714
20000	obs....	0,3245	»	»	»	0,3735	0,7940
	calc ...	Admis.	»	»	»	Admis.	Admis.
30000	obs....	0,3092	»	»	»	0,35605	»
	calc ...	0,3090	»	»	»	0,3572	»
= 33912	Δ......	0,3040	0,3670	0,4863	0,5849	0,3519	0,7415

IV.

P.		CCl^4.	$(C^2H^5)^2O$.	$CH^3.OH$.	$C^2H^5.OH$.	$C^3H^7.OH$.
20mm	obs....	»	»	»	0,3978	0,3993
	calc ...	»	»	»	0,4106	0,4109
50	obs....	0,80865	»	0,3965	0,3913	9,3930
	calc ...	Admis.	»	0,4097	0,4017	0,4025
200	obs....	0,77985	»	0,3845	0,3795	0,3814
	calc ...	0,7808	»	0,3929	0,3860	0,3872
400	obs....	0,7622	0,36188	0,3768	0,3725	0,3745
	calc ...	0,7632	0,36228	0,3830	0,3770	0,3785
3000	obs....	0,6938	0,32994	0,3465	0,3435	0,34595
	calc ...	0,6963	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.
8000	obs....	0,6406	0,3074	0,3245	0,3218	0,3237
	calc ...	0,6395	0,3077	0,3225	0,3212	0,3230
20000	obs....	0,59356	0,28152	0,2957	0,2954	0,2963
	calc ...	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.	Admis.
30000	obs....	0,5662	0,26605	0,2779	0,2795	0,28025
	calc ...	0,5648	0,2676	0,2811	0,2822	0,2820
π = 33912	Δ.....	0,5557	0,26315	0,2767	0,2780	0,2777

3. *Propriétés de la densité critique.* — I. Les expériences de M. Young fournissent une très belle vérification de la règle du *tiers de la densité*, comme le montre ce Tableau, dans lequel les densités critiques Δ sont les moyennes des nombres obtenus par les deux sortes de diamètres :

Corps.	Δ.	Tiers de la densité à $t°$.	$t°$.
C^6H^6...........	0,3038	0,3000	0°
C^6H^5Fl........	0,3543	0,3491	— 0,75
C^6H^5Cl........	0,3665	0,3635	+ 35
C^6H^5Br........	0,4860	0,4836	+ 53
C^6H^5I..........	0,5843	0,5808	+ 77,8
$CH^3.OH$........	0,2775	0,274	0
$C^2H^5.OH$.......	0,2786	0,269	0
$C^3H^7.OH$.......	0,2777	0,2733	0
$(C^2H^5)^2O$.......	0,2631	0,2453	0
$CH^3.COOH$.....	0,3516	0,3510	+ 16,3
CCl^4...........	0,5557	0,5440	0
$SnCl^4$..........	0,7414	0,7465	+ 14,9

Pour les trois alcools et l'éther, la densité du liquide n'est pas prise assez loin de la température critique pour que la vérification précise de la règle du *tiers de la densité* soit possible. Nous verrons, dans la suite de ce travail, une formule très simple qui s'applique à ce cas et permet le calcul très approché de la densité critique.

Le tiers de la densité du chlorure d'étain liquide, à basse température, est nettement plus grand que sa densité critique, contrairement à ce qui arrive pour les autres corps du Tableau précédent. Nous utiliserons cette remarque.

II. La méthode des deux diamètres, appliquée aux trois premiers alcools, donne pour leurs densités critiques *six* valeurs qui ne diffèrent de leur moyenne générale 0,2780 que de quantités très inférieures aux erreurs d'observation. Par suite, il est permis de conclure que les trois alcools ont *même densité critique*. Ce résultat se généralise de la façon la plus remarquable, et l'on peut dire que : *tous les alcools saturés, homologues de l'alcool méthylique, ont même densité critique, qu'ils soient normaux, primaires, secondaires ou tertiaires.*

Le Tableau suivant démontre cette proposition de la manière la plus nette pour *vingt et un* homologues supérieurs de l'alcool éthylique [1].

---

[1] La densité des liquides, telle qu'elle s'introduit dans les équations de la Thermodynamique, est *la densité* du liquide sous la pression de la vapeur saturée. Dans ces conditions,

Alcools en C^n.	n.	Ordre de l'alcool.	Densité à t^o.	t^o.	Δ.
Alcool isopropylique*..........	3	Secondaire.	0,791	+ 15°	0,276
Alcool butylique normal*.......	4	Primaire.	0,8135	+ 22	0,276
Alcool isobutylique*...........	4	Primaire.	0,802	+ 19	0,275
Alcool butylique secondaire.....	4	Secondaire.	0,827	0	0,276
Triméthylcarbinol*	4	Tertiaire.	0,7788	+ 30	0,277
Alcool amylique normal........	5	Primaire.	0,830	»	0,277
Alcool amylique de fermentation.	5	Id.	0,826	0	0,275
Méthylpropylcarbinol	5	Id.	0,824	0	0,275
Méthylisopropylcarbinol........	5	Id.	0,827	+ 17	0,276
Alcool hexylique normal........	6	Id.	0,833	0	0,278
Méthylbutylcarbinol	6	Id.	0,8227	0	0,274
Éthylpropylcarbinol	6	Id.	0,8343	0	0,278
Alcool pinacolique.............	6	Secondaire.	0,8347	0	0,278
Alcool heptylique normal.......	7	Primaire.	0,830	+ 16	0,277
Isoamylméthylcarbinol	7	Secondaire.	0,8185	+ 17,5	0,273
Dipropylcarbinol	7	Id.	0,814	+ 25	0,271
Diisopropylcarbinol............	7	Id.	0,8323	+ 17	0,277
Alcool octylique de l'Héracleum.	8	Primaire.	0,830	+ 16	0,277
Alcool octylique de Bouis.......	8	Secondaire.	0,823	+ 17	0,274
Hydrate d'octylène	8	Id.	0,811	0	0,270
Alcool undécylique............	11	Id.	0,826	+ 19	0,275

Pour les alcools qui ne sont pas marqués d'un astérisque, la densité critique Δ a été calculée en prenant le tiers de la densité à la température la plus basse possible. Pour les autres, dont la température critique est connue, Δ a été calculée à l'aide de la formule (2)

$$\Delta = \frac{\delta}{2(2-m)}, \tag{2}$$

l'état liquide est parfaitement défini par la température *seule*, abstraction faite du cas où le liquide est dans un tube capillaire.

Au contraire, la densité des liquides ordinaires, qui se trouve dans tous les Traités de Physique et de Chimie, et dont je me suis servi pour calculer d'une manière approchée la densité critique, est la densité du liquide *pris sous la pression de l'atmosphère*. Or, en général, la pression de vapeur saturée des liquides ordinaires est beaucoup plus faible que la pression atmosphérique; il s'ensuit que la plupart des liquides étudiés en Physique sont des *liquides comprimés*. Cette remarque s'applique d'ailleurs à l'eau, dont le maximum de densité *réel* est plus élevé de quelques millièmes de degré que le maximum *apparent* fixé en général à +4°. Aujourd'hui que le gramme est *défini* par le *kilogramme* des Archives, ou plutôt par la copie qui en a été faite par le Bureau international des Poids et Mesures, la remarque précédente n'a pas d'application. Si, comme autrefois, l'unité de poids était définie par le poids de 1cc d'eau à son maximum de densité, il serait *rationnel* de compléter la définition et d'ajouter que l'eau est prise *sous la pression de sa vapeur saturée*. L'unité de poids serait ainsi abaissée d'environ $\frac{1}{20000}$, et les densités des liquides ordinaires, *ramenées à la pression de la vapeur saturée*, devraient subir une double correction du même ordre de grandeur.

dans laquelle δ est la densité du liquide à t°, définie par $273 + t = m\Theta$. La formule (2) sera démontrée plus loin.

La signification physique de la loi démontrée par le Tableau précédent est très simple; en effet, d'après la règle du *tiers de la densité,* il s'ensuit que les alcools saturés, pour des températures de plus en plus basses, doivent avoir des densités de liquide sensiblement identiques, ce que l'expérience vérifie.

L'observation précédente ne s'étend pas à toutes les séries homologues; il semble au contraire qu'elle constitue un cas très particulier. Si l'on considère, en effet, la série des éthers simples bromés dérivés des alcools saturés, on trouve que, depuis le bromure de méthyle jusqu'au bromure d'heptyle, la densité du liquide (prise à la température la plus basse) et, par suite, la densité critique, diminuent très régulièrement et très rapidement, alors que le poids de la molécule augmente. Il en est de même dans la série homologue des acides gras saturés, bien que la loi de décroissement soit moins rapide (*voir* la fin de ce travail).

4. *Propriétés des diamètres.* — I. Dans ce qui suit, je m'occuperai exclusivement des diamètres relatifs aux températures correspondantes.

Soient :

y l'ordonnée d'un diamètre,
α son coefficient angulaire,
$T = m\Theta$ la température absolue,
Δ la densité critique,

on a

$$y = \Delta - \alpha(\Theta - T) = \Delta - \alpha\Theta(1 - m),$$

d'où

(3) $$y = \Delta[1 + a(1 - m)]$$

en posant

(4) $$a = -\frac{\alpha\Theta}{\Delta}.$$

Or j'ai montré dans un travail précédent (¹), et les nombres de M. S. Young vérifient également que, dans un intervalle d'environ 60° au-dessous de la température critique, les deux sortes de densités obéissent au

(¹) [illegible]THIAS, *Ann. de Toulouse,* 1891.

théorème des états correspondants (¹); les diamètres rectilignes doivent donc aussi lui obéir, au moins dans les mêmes limites.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que, dans l'équation (3), a soit une constante. Dans le Tableau suivant, je donne ce coefficient calculé d'après les expériences très précises de M. S. Young :

Corps.	Expérimentateurs.	a.	Corps.	Expérimentateurs.	a.
C^6H^6........	S. Young.	0,9359	$(C^2H^5)^2O$.....	S. Young.	0,9600
C^6H^5Fl......	Id.	0,9165	$CH^3.COOH$...	Id.	0,9617
C^6H^5Cl......	Id.	0,9557	$SnCl^4$........	Id.	0,9945
C^6H^5Br......	Id.	0,9639	CCl^4.........	Id.	0,9181
C^6H^5I.......	Id.	0,9572			

Moyenne générale : $a = 0,9518$.

Excepté la benzine monofluorée, le chlorure d'étain et le tétrachlorure de carbone, la concordance des valeurs de a est très remarquable. Par suite, le théorème de M. Van der Waals s'applique aux diamètres précédents dont l'équation est alors sensiblement

$$(3') \qquad y = \Delta[1 + 0,950(1 - m)].$$

La différence de 3 pour 100 par rapport à la moyenne donnée par la benzine monofluorée et le tétrachlorure de carbone n'a que peu d'influence. En effet, à 200° de la température critique, pour ces corps, $(1 - m)$ est sensiblement égal à $\frac{1}{3}$ et l'erreur sur y n'est que de $\frac{1}{130}$.

Quant au chlorure d'étain, il établit la transition entre le *groupe* de corps précédent et le suivant.

Le calcul de a, fait pour la partie rectiligne du diamètre des trois premiers alcools et pour l'acide sulfureux, donne le résultat suivant :

Corps.	Expérimentateurs.	a.	Corps.	Expérimentateurs.	a.
$CH^3.OH$......	S. Young.	1,0575	$C^3H^7.OH$....	S. Young.	1,0673
$C^2H^5.OH$....	Id.	1,0234	SO^2.........	Cailletet et Mathias.	1,0534

Moyenne générale : $a = 1,050$.

Ce Tableau montre que les diamètres des trois alcools et de l'acide sul-

(¹) D'après les expériences de M. S. Young, ce théorème est particulièrement exact pour les densités de liquides.

fureux obéissent au théorème de M. Van der Waals, car a est sensiblement constant.

Dans aucun de ces *groupes* ne se rangerait l'acide carbonique, d'après les nombres de MM. Cailletet et Mathias entre $-34°$ et $+20°$, et d'après ceux de M. Amagat entre $0°$ et $-31°35$. En particulier, le diamètre calculé d'après les nombres de M. Amagat donne $a = 0.858$, la densité critique étant 0.464. L'acide chlorhydrique présente un cas analogue, mais avec a sensiblement plus grand que *un*. Il semble donc que la constante a puisse prendre, oscillant autour de l'unité, toute une série de valeurs différentes; mais il est commode, au point de vue des états correspondants, de ranger les corps en *groupes*, caractérisés par des valeurs de a nettement différentes, ce coefficient restant sensiblement constant pour tous les corps d'un même *groupe*.

II. Le coefficient angulaire d'un diamètre rectiligne, exprimé en fonction de la température centigrade $t°$ est, d'après l'équation (4),

$$\alpha = -a\frac{\Delta}{\Theta}. \tag{5}$$

Il est donc négatif [1] et, dans chaque groupe de corps où le théorème des états correspondants s'applique (a constant), *le coefficient angulaire du diamètre est proportionnel à la densité critique et en raison inverse de la température critique absolue.*

Les diamètres les plus inclinés sont donc ceux pour lesquels Θ est petit et Δ grand (cas de l'oxygène); les moins inclinés sont ceux des corps à température critique élevée et à densité critique faible (cas de l'éther et de la benzine).

Cela donne une indication sur la rapidité de la variation des deux sortes de densités, cette variation étant, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à l'inclinaison du diamètre sur l'axe des abscisses.

Voici, à titre de renseignement, les coefficients angulaires des diamètres pour les corps étudiés par M. S. Young :

---

[1] Par suite, dans le même intervalle de températures, la variation absolue de la densité du liquide est toujours plus grande que celle de la vapeur saturée.

Corps.	α.	Corps.	α.
C^6H^6.........	— 0,000493	$CH^3.OH$......	— 0,000574
C^6H^5Fl.......	— 0,000581	$C^2H^5.OH$.....	— 0,000554
C^6H^5Cl......	— 0,000553	$C^3H^7.OH$.....	— 0,000552
C^6H^5Br......	— 0,000699	$(C^2H^5)^2O$.....	— 0,000540
C^6H^5I........	— 0,000775	$CH^3.CO\,OH$...	— 0,000582
CCl^4.........	— 0,000890	$SnCl^4$........	— 0,001246

Dans le groupe des alcools, a et Δ sont constants; la formule (5) montre, par suite, que le coefficient angulaire des alcools doit diminuer régulièrement à mesure que la température s'élève, c'est-à-dire à mesure que la molécule devient plus lourde. C'est ce que ce Tableau permet de vérifier.

III. *Application du diamètre à l'obtention de formules précises pour la densité de liquide.* — Soient δ et δ' les densités du liquide et de la vapeur saturée, et y l'ordonnée du diamètre à la même température. On a

$$\delta = 2y - \delta'.$$

Or, comme je l'ai montré antérieurement, la densité de vapeur saturée δ' est représentée parfaitement entre $m = 0{,}8$ et $m = 1 - \varepsilon$ par la formule empirique

$$\delta' = A\left(1 - m - 1{,}124\sqrt{\overline{1 - m} + \overline{0{,}579}^2}\right).$$

On connaît, d'autre part, l'équation du diamètre rectiligne. La formule précédente doit donc donner très exactement la densité du liquide, même pour $m < 0{,}8$. En effet, dans ces conditions, y est exact et δ' est trop faible; mais, si l'erreur relative sur δ' est de quelques centièmes, l'erreur absolue est négligeable devant la densité δ du liquide. Appliquons, à titre d'exemple, au tétrachlorure de carbone, d'après les données des expériences de M. S. Young,

$$y = 0{,}5558 + 0{,}5094(1 - m),$$
$$\delta' = 1{,}46\left(1 - m - 1{,}124\sqrt{\overline{1 - m} + \overline{0{,}579}^2}\right),$$

d'où

$$\delta = 0{,}6232 - 0{,}4412(1 - m) + 1{,}641\sqrt{1 - m}.$$

T.	m.	δ observé.	δ calculé.
407°,9	0,7334	1,3565	1,3518
421,2	0,7574	1,3259	1,3235
430,05	0,8092	1,2549	1,2549
457,6	0,8208	1,2344	1,2347
470,7	0,8464	1,1958	1,1976
482,0	0,8667	1,1600	1,1626
496,65	0,8930	1,1096	1,1117
516,55	0,9288	1,0288	1,0287
532,75	0,9579	0,9425	0,9403
541,2	0,9731	0,8814	0,8795
546,65	0,9829	0,8336	0,8291
551,5	0,9919	0,7806	0,7648

La méthode du diamètre fournit ainsi une formule qui s'applique dans un intervalle de 150° au-dessous de la température critique (556°,15). La densité prise à la température de 551°,5 est nettement trop forte; la même remarque peut être faite sur tous les corps étudiés par M. Young aux températures qui correspondent à 551°,5.

IV. *Liquides possédant un diamètre rectiligne.* — Soit un corps admettant un diamètre rectiligne jusqu'à la solidification, et passant à l'état solide sans présenter les états pâteux. Soit X la température absolue de fusion ou de solidification (suivant les cas). Appelons $(3+f)\Delta$ la valeur limite qu'atteint la densité δ du liquide à la température $X = x\Theta$ (¹): la densité de vapeur saturée est sensiblement nulle, et l'ordonnée y du diamètre égale $\frac{\delta}{2}$. Portons cette valeur dans l'équation (3) du diamètre rectiligne; m devient x, et l'on tire

$$x = 1 - \frac{1+f}{2a},$$

ou sensiblement

$$x = \frac{1-f}{2}. \tag{6}$$

puisque a est généralement voisin de *un*.

Si l'on connaît la température de fusion ou de solidification et la température critique, x est connu, et l'équation (6) permet de calculer f au

(¹) Si $f = 0$, la limite de la densité δ du liquide est bien 3Δ, comme le veulent les *isothermes réduites* des différentes équations des fluides (de Van der Waals, de Clausius, etc.).



moyen de nombres tirés de l'expérience. On a alors

$$(6)' \qquad f = 1 - 2x.$$

Pour $x < \frac{1}{2}$, f est positif.
Pour $x = \frac{1}{2}$, f est nul.
Pour $x > \frac{1}{2}$, f est négatif.

Donc, selon la valeur de x, la valeur limite de la densité δ du liquide peut être supérieure, égale ou inférieure au triple de la densité critique Δ.

Dans la majorité des cas, x est inférieur à $\frac{1}{2}$, et très souvent supérieur ou égal à 0,45 ; f est donc très souvent compris entre 0 et + 0,10.

Plus exactement, f est donné par la formule

$$(6)'' \qquad f = (2a - 1) - 2ax = 2a(1 - x) - 1.$$

Mais cela ne change rien d'essentiel aux conclusions tirées de l'équation (6)'; la valeur $\frac{1}{2}$ que l'on comparait à x est simplement remplacée par l'expression

$$1 - \frac{1}{2a}.$$

Pour $a = 0,95$, x variant de 0,474 à 0,45, f varie de 0 à + 0,045.
Pour $a = 1,05$, x variant de 0,524 à 0,45, f varie de 0 à + 0,155.

Proposons-nous de calculer f pour un certain nombre de corps; à cause de la perturbation qui affecte le diamètre rectiligne au voisinage de la fusion ou de la solidification, et que nous avons négligée, les valeurs obtenues pour f seront simplement approchées.

1° *Cas où a est connu.*

Corps.	Θ.	a.	Température absolue de solidification.	Température absolue de fusion.	x.	f.
C^6H^6	561°,5	0,9359	»	276°	0,4915	−0,048
C^6H^5F	559,55	0,9165	»	272,2	0,4865	−0,039
C^6H^5Cl	633,0	0,9557	»	233	0,3681	+0,208
C^6H^5Br	670,0	0,9639	<253	»	<0,3776	>+0,200
C^6H^5I	721,0	0,9572	<255	»	<0,3526	>+0,237
CCl^4	556,15	0,9181	248,3	»	0,4464	+0,016
$SnCl^4$	591,7	0,9945	<287,9	»	<0,4865	>+0,021
$(C^2H^5)^2O$	467,4	0,9600	242	»	0,5177	−0,074
$CH^3.COOH$	594,6	0,9617	289,2	289,2	0,4864	−0,009
CO^2	304,0	0,858	»	216	0,7105	0,503
SO^2	429,0	1,0534	197	»	0,4592	+0,139

2° *Cas où l'on suppose $a = 1$.*

Corps.	Θ.	Température absolue de solidification.	Température absolue de fusion.	x.	f.
Azote	127	58	»	0,4567	+0,087
Hypoazotide	444,2	264	»	0,5943	—0,189
Acide chlorhydrique	324,2	163	»	0,5028	—0,006
Acide sulfhydrique	373,2	187,4	»	0,5021	—0,004
Cyanogène	397,0	»	238,6	0,6010	—0,202
Protoxyde d'azote	309,4	»	174	0,5624	—0,125
Sulfure de carbone	550	»	163	0,2964	+0,407
Chloroforme	537	»	203	0,3780	+0,244
Triméthylcarbonal	507,9	»	298	0,5867	—0,173

Ces Tableaux donnent la signification exacte de la règle du *tiers de la densité;* ils montrent qu'elle n'est qu'une relation approchée et qu'elle donne, pour la densité critique, des valeurs tantôt par défaut (cas de l'acide carbonique) et tantôt par excès (cas du chlorure d'étain)[1]. Dans ce dernier cas, probablement le plus fréquent, l'erreur commise sur Δ pourrait être notable si l'on se servait de la densité δ du liquide à la température de fusion ou de solidification. Le plus souvent, le point de fusion n'a pas été déterminé, ni la densité correspondante non plus, et l'on ne possède que des valeurs de δ se rapportant à des températures sensiblement plus hautes : alors la relation $\Delta = \frac{\delta}{3}$ est beaucoup plus approchée.

V. *Liquides ne possédant pas de diamètre rectiligne.* — Nous avons vu que c'était le cas des trois alcools méthylique, éthylique et propylique, dont le diamètre est curviligne dans une très grande partie de sa longueur. C'est également le cas de l'eau. Aucune règle ne permet actuellement de prévoir si un corps a ou non un diamètre rectiligne.

5. *Calcul rapide de la densité critique.* — La considération du diamètre rectiligne permet de démontrer très simplement la formule (2), qui nous a déjà servi pour calculer la densité critique, connaissant Θ et une

(1) Les *isothermes réduites* provenant des équations de Van der Waals, ou de Clausius, ou même de l'équation plus générale que j'ai signalée (*Ann. de Toulouse*, 1891) ne peuvent faire prévoir ce résultat. En effet, pour $n = \frac{1}{3}$, elles donnent toutes $m = 0$ au lieu de m voisin de $\frac{1}{2}$ que donne l'expérience. De plus, pour $n < \frac{1}{3}$ ou $\delta > 3\Delta$, on aurait $m < 0$, ce qui est absurde. Cela montre que les diverses équations des fluides ne représentent plus du tout l'état liquide au voisinage de la solidification.

valeur δ de la densité du liquide telle que la densité de vapeur saturée ne soit pas sensible ($m \leq 0,7$) [1].

Dans ces conditions, on a, à un assez haut degré d'approximation, $\delta = 2y$. Remplaçons l'ordonnée y du diamètre rectiligne par sa valeur tirée de (3), il vient

$$\delta = 2\Delta[1 + a(1 - m)],$$

d'où

$$\Delta = \frac{\delta}{2[1 + a(1 - m)]}.$$

Remplaçons a par l'unité, il vient alors la formule approchée (2)

$$(2) \qquad \Delta = \frac{\delta}{2(2 - m)}.$$

Cette formule provient, comme on le voit, des deux résultats les plus importants de l'étude expérimentale des densités (diamètre rectiligne et a voisin de *un*); on peut donc accorder une grande confiance aux résultats qu'elle fournit (*voir* le Tableau final).

Il est facile de se rendre compte du degré d'approximation de cette formule. Les valeurs bien connues de a oscillent généralement entre 0,95 et 1,05. En prenant $a = 1$, on commet sur a une erreur moyenne de 0,05. Pour $1 - m = 0,2$ l'erreur sur $a(1 - m)$ n'est que de 0,01, et l'erreur sur Δ est de $\frac{1}{120}$. Pour $1 - m = 0,4$ l'erreur sur $a(1 - m)$ est 0,02 et l'erreur possible sur Δ est $\frac{1}{70}$. L'erreur provenant de a est donc d'autant plus grande que m est plus petit, c'est-à-dire la température plus basse. L'erreur, toujours par défaut, provenant de la densité δ' de la vapeur saturée est de même signe que la précédente si $a < 1$, de signe contraire si $a > 1$.

La formule (2) donnera donc des résultats particulièrement bons dans ce dernier cas. Au moyen des densités δ prises à différentes températures, on devra obtenir des valeurs de Δ presque rigoureusement constantes. Malheureusement la compensation des erreurs est imparfaite ; si l'on calcule Δ en prenant des valeurs de δ à température croissante, l'erreur négative provenant de la vapeur saturée croît rapidement, l'erreur positive provenant de a décroît au contraire; les valeurs de Δ décroissent lorsque

---

[1] Pour $m = 0,70$, la densité de vapeur saturée δ' est généralement voisine du *centième* de la densité du liquide δ.

m croît. C'est ce que montre le Tableau suivant, dans lequel la formule est appliquée à l'acide sulfureux :

δ.	$t°$.	m.	$\frac{\delta}{2(2-m)}$.
1,5128	−30	0,5664	0,527
1,4340	0	0,6363	0,526
1,4066	−10	0,6597	0,525
1,3792	+20	0,6830	0,524
1,3505	+30	0,7063	0,522

Le nombre 0,522 donné par la densité à + 30 est le plus rapproché de la densité critique exacte 0,520; cela tient à ce que les erreurs de signes contraires sont sensiblement égales, leur valeur absolue étant voisine de $\frac{1}{100}$.

Dans le cas où $a < 1$, les deux erreurs par défaut s'ajoutent, et pour $m = 0,70$ leur somme peut atteindre et dépasser un peu 2 pour 100. Il faut alors, ou bien calculer Δ à température basse ($m \leqq 0,60$ par exemple), auquel cas la densité de vapeur saturée δ' est absolument négligeable, mais où l'erreur provenant de a est grande, ou bien calculer Δ à température plus élevée en tenant compte de δ', la formule (2) devenant

$$\Delta = \frac{\delta + \delta'}{2(2-m)}.$$

Lorsqu'on veut employer la densité de liquide prise à la température d'ébullition sous la pression atmosphérique [1], il faut absolument employer la formule précédente, dont on pourra pousser l'application jusqu'à $m = 0,75$ environ. Dans ce cas, la pression étant faible, on calculera aisément δ' par l'application de la loi de Mariotte et de la loi de Gay-Lussac. Pour $m > 0,75$, le calcul approché de δ' devient trop incertain.

La formule (2), dans les conditions où elle est applicable, est très supérieure, à peine est-il besoin de le dire, à la règle du tiers de la densité dont elle est une généralisation (elle la redonne pour $m = 0,5$); c'est ce que montre le Tableau suivant [2] :

---

(1) Pratiquement c'est, parmi les densités δ que l'on peut employer, celle qui correspond à la température la plus élevée; quand on a pris des densités de liquides à température plus haute, c'est que la densité de vapeur saturée δ' a été étudiée expérimentalement; alors Δ est déterminé par la méthode du diamètre et la formule (2) est inutile.

(2) Qui n'est autre qu'un Tableau tiré de mon précédent Mémoire (*Ann. de Toulouse*, 1891), complété par la formule (2), mais d'où l'on a retiré l'éthylène et l'acide chlorhydrique auxquels cette formule ne peut s'appliquer, vu que la densité de vapeur saturée correspondant à la densité du liquide n'est pas négligeable.

Corps.	δ.	t.	$\frac{\delta}{3}$.	$\frac{\delta}{2(2-m)}$.	Δ.
CO^2............	1,057	$-34°$	0,352	0,460	0,460
Az^2O...........	1,003	$-20,6$	0,334	0,423	0,410
SO^2............	1,5128	-30	0,504	0,527	0,520
$(C^2H^5)^2O$......	0,736	0	0,245	0,259	0,260
Az.............	0,866	-202	0,289	0,299	0,299
CH^4............	0,415	-164	0,138	0,145	0,143
AzH^3..........	0,6138	$+16,5$	0,204	0,2394	0,2387
O..............	1,0883	$-169,5$	0,363	0,408	0,405

Il suffit donc de connaître *une* valeur δ de la densité de liquide et la température critique pour avoir, par cela même, une valeur très approchée de la densité critique (¹).

Comme cela se rencontre dans un très grand nombre de cas, on voit qu'il est dès lors possible de calculer Δ pour la plupart des corps et de faire entrer cette quantité physique dans un Tableau des constantes critiques du genre de celui qui est inséré, depuis 1891, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, ou dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1891).

La formule (2) donne lieu à une construction graphique extrêmement simple.

Soit M (*fig.* 1) le point représentatif de la densité de liquide δ lorsque l'abscisse est m. Joignons le milieu D de MP au point A dont l'abscisse est $m = 2$; AD *est le diamètre* et l'ordonnée BC correspondant à $m = 1$ *est la densité critique* Δ, au degré d'approximation de la formule, bien entendu. La construction reste la même si l'on veut tenir compte de la densité δ' de la vapeur saturée qui correspond à δ (²).

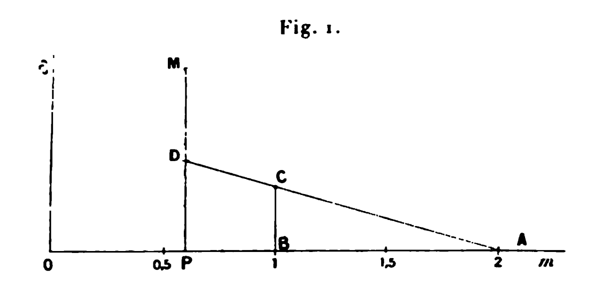
(¹) La formule (2) a été démontrée dans l'hypothèse d'un diamètre rectiligne; peut-on l'appliquer à un corps comme l'alcool éthylique dont le diamètre est curviligne pour $m > 0,50$? Dans ce cas, même en employant la formule (2) complétée par la vapeur saturée, le numérateur de Δ est nettement *trop petit*. On doit donc s'attendre à avoir des valeurs de Δ approchées par défaut.

L'alcool éthylique donne ainsi........	$\Delta = 0,2743$,	au lieu de 0,2780,	avec	$\delta = 0,807$ à 0°
L'alcool propylique donne...........	$\Delta = 0,2761$	» 0,2780	»	$\delta = 0,813$ à +10°
Cependant l'alcool méthylique donne..	$\Delta = 0,2799$	» 0,2780	»	$\delta = 0,822$ à 0°

(²) On pourrait se proposer d'utiliser la formule (2) pour calculer la température critique

Aux deux moyens précédents de calculer Δ, connaissant Θ et δ, on doit

Fig. 1.



ajouter celui qui repose sur la formule empirique

$$\delta = \mathrm{A}(m - 0,569 + 1,66\sqrt{1 - m}),$$

pour laquelle je renvoie à mon Mémoire précédent (*Annales de Toulouse*, 1891). Les densités de liquides tirées du Mémoire de M. S. Young, à l'exception des alcools, la vérifient très bien lorsqu'on donne à la constante A des valeurs convenables qui se trouvent être rigoureusement proportionnelles aux densités critiques, comme le veut le théorème des *états correspondants* :

C^6H^6	$\frac{A}{\Delta} = \frac{0,709}{0,3037} = 2,334$	CCl^4..........	$\frac{A}{\Delta} = \frac{1,294}{0,5558} = 2,328$
C^6H^5Fl	$= \frac{0,827}{0,3543} = 2,334$	$(C^2H^5)^2O$	$= \frac{0,616}{0,2631} = 2,341$
$CH^3.COOH$....	$= \frac{0,836}{0,3514} = 2,378$	$SnCl^4$.........	$= \frac{1,740}{0,7413} = 2,347$

Valeur moyenne : $\frac{A}{\Delta} = 2,345$.

On a en moyenne

$$\delta = 2,345\,\Delta(m - 0,569 + 1,66\sqrt{1 - m}).$$

---

d'un corps connaissant *deux* densités de liquide δ et δ_1 aux températures T et T_1. On trouve alors

$$\Theta = \frac{1}{2}\,\frac{\delta T_1 - \delta_1 T}{\delta - \delta_1};$$

Θ est donné par le quotient de deux quantités très petites sur lesquelles les erreurs d'expérience ont une influence énorme. Θ est très mal déterminé.

Connaissant δ et m, cette formule, pour m compris entre 0,8 et $1-\varepsilon$, fera, en général, connaître Δ à moins de $\frac{1}{100}$; par suite, elle complète la formule (2) qui s'applique aux valeurs de m inférieures à 0,75 [1].

Aux méthodes de calcul précédentes, il convient de joindre le théorème des *états correspondants*, dont l'emploi est précisé par ce qui suit, et la formule de M. Ph.-A. Guye [2]

$$1146\,\frac{\Delta.\Theta}{\pi\,(1070+\Theta)}=\frac{M}{28,87}, \tag{7}$$

dans laquelle M est le poids moléculaire, Δ, Θ, π la densité, la température absolue et la pression critiques.

Cette formule a l'inconvénient d'introduire dans le calcul de Δ un trop grand nombre de quantités : Θ, π, M, de sorte que les erreurs commises sur chacune d'elles s'ajoutent dans le calcul de Δ. Comparons les résultats qu'elle donne aux résultats si précis de la méthode des diamètres; les corps considérés sont ceux qui ont été étudiés par M. S. Young; M, Θ et π sont tirés de ses expériences.

Corps.	M.	Θ.	π.	Δ(Guye).	Δ(diamètre).
		°	atm		
C^6H^6...........	77,84	561,5	47,89	0,3279	0,3038
C^6H^5Fl.........	95,8	559,55	44,62	0,3768	0,3543
C^6H^5Cl........	112,2	633,0	44,62	0,4077	0,3665
C^6H^5Br........	156,6	670,0	44,62	0,5493	0,4860
C^6H^5I.........	203,4	721,0	44,62	0,6824	0,5843
CCl^4...........	153,45	556,15	44,97	0,6207	0,5557
$SnCl^4$..........	259,3	591,7	36,95	0,8145	0,7414
$(C^2H^5)^2O$......	73,84	467,4	35,60	0,2613	0,2631
$CH^3.OH$........	31,93	513,0	78,63	0,2345	0,2775
$C^2H^5.OH$.......	45,90	516,0	62,96	0,2689	0,2786
$C^3H^7.OH$.......	59,87	536,7	50,16	0,2719	0,2777
$CH^3.COOH$.....	59,86	594,6	57,10	0,2897	0,3516

---

[1] Il suffit également de connaître une valeur de la densité de vapeur saturée δ' et la valeur de m correspondante (m compris entre 0,85 et $1-\varepsilon$) pour qu'il soit possible de calculer Δ par la formule connue

$$\delta'=A'\left(1-m-1,124\sqrt{1-m}+\overline{0,579}^2\right).$$

Malheureusement, le rapport $\frac{A'}{\Delta}$, tout en oscillant autour de 2,60, varie dans de trop larges limites pour qu'on puisse accorder la même confiance à cette formule qu'à celle qui représente l'état liquide. L'erreur sur Δ peut s'élever jusqu'à 4 pour 100.

[2] Ph.-A. Guye, *Comptes rendus*, t. CXII, 1891, et *Thèse de Doctorat*, p. 129 à 134.

Ce Tableau montre, en toute évidence, que la formule de M. Guye n'est pas rigoureuse. Il est, en effet, impossible d'expliquer par des erreurs expérimentales commises sur M, Θ et π les différences données par la formule (7) et la méthode des diamètres. Au lieu de donner pour les trois alcools des densités critiques sensiblement identiques, la formule de M. Guye donne les valeurs par défaut 0,2345, 0,2689, 0,2719, dont la première est trop faible de 16 pour 100 par rapport à la densité critique vraie 0,278. Il n'y a que l'éther pour lequel l'accord soit satisfaisant; par contre, pour l'acide acétique, l'erreur par défaut atteint 18 pour 100 de la densité trouvée par le diamètre. Pour les sept premiers corps du Tableau, l'erreur est, au contraire, par excès et du même ordre de grandeur que les erreurs par défaut.

On trouverait, dans le mode même d'établissement de la formule (7), l'explication de ce qui précède. En effet, M. Guye *suppose* à un certain moment qu'un facteur F, qui a des expressions très différentes selon que l'on part de l'équation des fluides de M. Van der Waals ou de celle de M. Sarrau, est une fonction linéaire $A + B\Theta$ de la température critique absolue, et il détermine les valeurs des constantes A et B au moyen des constantes critiques de l'azote (calculées par M. Sarrau) et de la benzine monoiodée (déterminées par M. S. Young). Or il est démontré dans la suite de ce Mémoire que les volumes critiques déterminés par M. S. Young sont entachés d'erreurs considérables. Il s'ensuit que les valeurs de A et de B sont incorrectes ([1]).

6. *Détermination directe de la densité critique.* — Les densités critiques déterminées par la méthode du diamètre diffèrent beaucoup de celles qu'on déduit des *volumes critiques* observés directement par divers observateurs, tels que MM. Battelli, Young et Ramsay ou Young. La comparaison est faite dans le Tableau suivant qui, à part la dernière colonne,

---

([1]) Il est juste de reconnaître que la formule (7) n'a pas été donnée comme permettant de calculer la densité critique Δ, connaissant Θ, π et M. Par la comparaison des deux membres de l'égalité (7), selon qu'ils sont sensiblement égaux, ou doubles, ou triples l'un de l'autre, M. Guye en conclut que la molécule est restée, au point critique, la même qu'à l'état ordinaire, ou qu'elle s'est doublée, triplée, etc. Pour cet objet, très important, la formule de M. Guye reste valable, et il n'est pas besoin qu'elle soit une relation rigoureusement exacte entre Δ, Θ, π et M. Il serait, cependant, intéressant de voir si, avec des valeurs plus exactes de A et de B, elle pourrait remplir les deux buts à la fois.

est équivalent au Tableau XXI du Mémoire de M. Young. Les volumes spécifiques ont simplement été transformés en densités.

			Densité critique			
Corps.	Moyen rapport.	Volume moléculaire critique calculé.	calculée par le moyen rapport.	observée par Young.	observée par Ramsay et Young.	déterminée par les 2 diamètres.
C^6H^5Fl	»	»	»	0,411	»	0,3543
C^6H^5Cl	1,1246	262	0,427	0,427-0,408	»	0,3665
C^6H^5Br	1,1802	275	0,568	»	»	0,4860
C^6H^5I	1,2772	298	0,680	»	»	0,5845
C^6H^6	0,944	220	0,353	0,354	»	0,3038
CCl^4.......	1,010	235	0,654	»	»	0,5557
$SnCl^4$......	1,290	301	0,862	»	»	0,7414
$(C^2H^5)^2O$ ..	1,047	244	0,303	»	0,246	0,2631
$CH^3.OH$....	0,440	103	0,311	»	0,270	0,2775
$C^2H^5.OH$...	0,620	144	0,317	»	0,286	0,2786
$C^3H^7.OH$...	0,800	186	0,321	»	0,2777	0,2777
$CH^3.COOH$.	0,630	147	0,408	»	»	0,3516

Ce Tableau montre de la façon la plus nette que la méthode expérimentale employée par M. S. Young pour déterminer le *volume critique* [1] est défectueuse et donne des nombres trop petits d'environ 15 pour 100.

Les volumes critiques observés par MM. Ramsay et Young sont, au contraire, trop grands en ce qui concerne l'éther et l'alcool méthylique; l'alcool éthylique a un volume critique trop faible. Il est remarquable cependant que les volumes critiques $3^{cc},7$, $3^{cc},5$, $3^{cc},6$ des trois alcools soient sensiblement égaux et que leur moyenne $3^{cc},6$ soit rigoureusement exacte et concorde avec la densité critique déterminée par la méthode des diamètres.

Le Tableau XXI du Mémoire de M. Young contient des volumes critiques *calculés comme il suit*. Si l'on compare les densités de liquides *prises à des pressions correspondantes* à celles de la benzine monofluorée, M. S. Young trouve que les rapports obtenus sont constants pour un même corps à 1 ou 2 pour 100 en général, et cela *dans toute l'étendue de l'état liquide* (Tableau XXII du Mémoire). C'est là, on peut le dire, un résultat capital du beau travail de M. Young. Les moyennes des rapports ainsi obtenus pour chaque couple de corps sont aussi les rapports des densités

---

(1) S. YOUNG, *loco citato*, p. 182.

critiques, qui sont les limites des densités de liquides; si donc on a déterminé d'une façon certaine la densité critique d'un corps, de la *benzine monofluorée* par exemple, une simple multiplication donne par suite la densité critique de tous les corps dont le moyen rapport avec le corps précédent a été déterminé. Malheureusement, *le volume critique de la benzine monofluorée, déterminé directement avec le plus grand soin par M. Young et considéré par lui comme exact, est erroné d'environ* 16,5 *pour* 100. Il s'ensuit que tous les volumes critiques calculés par M. Young sont entachés de la même erreur. Cela est regrettable, car *la méthode en elle-même est exacte.*

Si l'on prend les rapports des densités critiques admise et calculées par M. Young à celles que j'ai déterminées par la méthode des diamètres, on trouve respectivement les nombres

1,160	1,165	1,168	1,164	1,162	1,177
1,161	1,151	1,121	1,138	1,156	1,164.

qui démontrent par leur constance l'inexactitude de la méthode expérimentale employée par M. Young.

La discordance des nombres expérimentaux contenus dans le Tableau précédent prouve, une fois de plus, qu'il est difficile, sinon impossible, de déterminer directement et avec précision la densité critique, conclusion à laquelle je suis arrivé dans mon précédent Mémoire. Au contraire, la méthode du diamètre, même appliquée à une grande distance de la température critique [1], fournit des valeurs précises de la densité critique, parce que, le coefficient angulaire du diamètre étant toujours très faible (il varie de $-0,000493$ à $-0,001246$ pour les corps étudiés par M. Young), une erreur de 1° sur la température critique donne une erreur négligeable et sûrement plus petite que les erreurs d'observation.

7. *Remarques sur le théorème des états correspondants* [2]. — Le Ta-

---

[1] C'est le cas de la *benzine monobromée* et de la *benzine monoiodée*.

[2] Dans mon précédent Mémoire (*Annales de Toulouse*, 1891), à propos de la vérification du théorème des états correspondants par des nombres tirés de l'expérience, j'ai omis de citer les travaux de M. L. Natanson sur la concordance des équations caractéristiques et des courbes orthobares des fluides. En réparant cet oubli, je suis heureux de constater la part importante prise par ce physicien à l'établissement définitif du beau théorème de M. Van der Waals (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, décembre 1889, et *Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*, juin 1891).

bleau XIII du Mémoire de M. Young montre que, si l'on compare les densités de liquides à celles de la benzine monofluorée *à des températures correspondantes,* les rapports sont remarquablement constants pour un même corps *dans toute l'étendue de l'état liquide;* la perfection de ce mode de comparaison est presque la même que celle des densités *prises à des pressions correspondantes.*

Si donc, pour différents liquides, on porte en abscisses les valeurs de m et en ordonnées celles du rapport $\frac{\delta}{\Delta}$ (à des températures correspondantes), les différentes courbes obtenues seront presque rigoureusement superposées, la coïncidence étant d'autant plus parfaite généralement que l'on est plus près de la température critique.

Or, dans ce travail, j'ai montré, d'après des nombres expérimentaux sûrs, que les *diamètres* (relatifs aux températures correspondantes) formaient actuellement deux groupes bien distincts; par suite, les droites qui ont pour équation

$$\frac{y}{\Delta} = 1 + a(1 - m)$$

se superposent, dans le mode de représentation précédent, sensiblement suivant deux droites déterminées par $a = 0{,}950$ et $a = 1{,}050$.

Tant que l'on sera près de la température critique, les deux droites précédentes se distingueront à peine; car la différence des ordonnées n'est que de 1 pour 100 pour $m = 0{,}9$.

Considérons les courbes données par la densité de vapeur saturée : $\frac{\delta'}{\Delta} = f(m)$; elles sont déterminées géométriquement par la considération du diamètre rectiligne.

Pour les corps d'un même *groupe* (a constant), les courbes des liquides et les diamètres coïncident sensiblement; il en sera de même des courbes relatives à la vapeur saturée. Toutefois, il faut remarquer que, vu la faible valeur de δ' sitôt que l'on s'éloigne un peu de la température critique, les écarts de la courbe du liquide et du diamètre (par rapport aux lignes types) s'ajoutant pour la vapeur saturée, les écarts de celle-ci, petits en valeur absolue, *peuvent devenir considérables en valeur relative* [1].

---

[1] En effet, les écarts peuvent être un certain nombre de *centièmes* de l'ordonnée du diamètre, qui est très grande par rapport à l'ordonnée presque nulle de la densité de vapeur saturée.

C'est ce que montre très bien le Tableau XV du Mémoire de M. Young. Les monosubstitués halogénés de la benzine forment une famille très homogène, un groupe parfait dans lequel les rapports des densités de vapeur saturée, à des températures correspondantes, restent presque absolument constants, comme M. Young l'a fait remarquer. Mais, pour la benzine et l'éther qui, au point de vue de la valeur de a, font partie du même groupe, les variations des rapports des densités de vapeur saturée sont trois et quatre fois plus grandes. Elles s'exagèrent encore avec le tétrachlorure de carbone.

Si l'on considère des corps de deux groupes (a différent), les courbes du liquide coïncident, mais les diamètres ne coïncident plus; donc les courbes de la vapeur saturée ne coïncident pas non plus. Donc *le théorème des états correspondants, en ce qui concerne la densité de vapeur saturée, et pour des températures correspondantes, n'est plus vrai pour des corps de groupes différents dès qu'on s'éloigne un peu de la température critique.*

Soient $a = 0,95$ et $a' = 1,05$; à la limite de l'état liquide, on a $m = 0,5$ environ; par suite, les ordonnées des deux diamètres rectilignes diffèrent de 3,33 pour 100 de leur valeur. Donc, en supposant que les courbes des liquides coïncident rigoureusement, les ordonnées des densités de la vapeur saturée diffèrent de 6,66 pour 100 de l'ordonnée maxima du diamètre! Le rapport des densités de vapeur saturée, à des températures correspondantes, peut alors varier du simple au double, par exemple [1].

On voit par là combien il faut se montrer réservé dans l'application du théorème des états correspondants aux densités de vapeur saturée prises à des *températures correspondantes,* soit pour le calcul des densités critiques, soit pour l'obtention de formules, identiques par rapport à m, et devant représenter avec précision la variation de δ' dans un petit intervalle au-dessous de la température critique.

Au contraire, le calcul des densités critiques par le moyen du théorème des états correspondants, appliqué aux densités de liquides (prises à des températures ou à des pressions correspondantes), est absolument légitime, même très loin de la température critique.

Si l'on compare, avec M. S. Young, les densités de vapeur saturée *à*

---

[1] Les raisonnements précédents s'appliquent aux corps dont le diamètre est rectiligne; ils ne s'appliquent aux alcools que dans les limites où le diamètre est rectiligne.

des pressions correspondantes, on améliore beaucoup leur comparabilité; dans ces conditions, tous les corps étudiés par ce physicien, à l'exception des alcools et de l'acide acétique, obéissent au théorème de M. Van der Waals pour la vapeur saturée, et cela *sensiblement dans toute l'étendue de l'état liquide.*

M. Young a montré de même que, si l'on rapporte les propriétés des alcools à l'un d'eux pris comme terme de comparaison, au lieu de les comparer à la *benzine monofluorée,* le théorème des états correspondants, toujours satisfait pour les densités de liquides, l'est aussi pour les tensions de vapeur, et même sensiblement pour la densité de vapeur saturée, pourvu que la comparaison soit faite *à des pressions correspondantes.*

On voit donc que c'est, en somme, M. Young qui a montré l'existence des *groupes* (groupe des alcools, groupe des monosubstitués halogénés de la benzine) pour la vérification du beau théorème de M. Van der Waals.

La majeure partie des irrégularités présentées par les densités de vapeur saturée des alcools et de l'acide acétique pouvant s'interpréter par une dissociation partielle de leurs vapeurs, M. S. Young paraîtra sans doute s'être montré d'une rigueur excessive envers les *généralisations de M. Van der Waals,* lorsqu'il a donné pour conclusion à son beau travail expérimental que : « Ces généralisations, très près d'être exactes pour les monosubstitués halogénés de la benzine, n'étaient que de grossières approximations pour la benzine, le tétrachlorure de carbone, le chlorure d'étain et l'éther, et qu'enfin la plupart n'étaient pas bonnes du tout pour les trois alcools et l'acide acétique (¹) ».

8. *Densités critiques nouvelles.* — Voici, à titre de renseignement, un certain nombre de densités critiques nouvelles (²) calculées, soit par la méthode du tiers de la densité, soit par la formule (2), qui permettent d'utiliser (si l'on peut s'exprimer ainsi) les densités de liquides dispersées dans le *Dictionnaire de Wurtz* et ses suppléments, et restées jusqu'ici sans application physique et sans lien. Les températures critiques dont je me suis servi sont celles dont j'ai donné un Tableau complet dans mon précédent Mémoire (*Ann. de Toulouse,* 1891). Lorsqu'il y a plusieurs déterminations pour un même corps, j'ai généralement admis une valeur moyenne.

(¹) S. YOUNG, *loco citato,* p. 172.
(²) Autres que celles qui sont déjà indiquées dans ce Mémoire.

Enfin les densités marquées d'un astérisque sont celles qui, prises à la température d'ébullition sous la pression atmosphérique ou tout près de cette température, ont nécessité pour Δ l'emploi de la formule (2) complétée par la densité de vapeur saturée.

Corps.	δ.	t.	$\frac{\delta}{3} = \Delta$.	$\frac{\delta}{2(2-m)} = \Delta$.	
Sulfure de carbone	1,293	0°	0,431	0,430	0,430
Sulfure de carbone	1,271	+ 15	»	0,428	
Chlore	1,33 env.	?	0,443	»	
Brome (¹)	3,187	0	1,062	»	
Iode (solide)	4,948	+ 17	1,649	»	
Éthylamine	0,6964	+ 8	»	0,253	
Propylamine (²)	0,7283	0	»	0,252	0,253
Propylamine	0,7134	+ 21	»	0,254	
Trichlorure de phosphore	1,6125	0	0,537	0,534	
Hypoazotide	1,5035	— 5	»	0,539	0,542
Hypoazotide	1,488	+ 5	»	0,541	
Hypoazotide	1,474	+ 15	»	0,545	
Eau	1,000	+ 4	0,333	»	0,342
Eau	0,9585	+ 100	»	0,3385	
Eau	0,9400	+ 124,1	»	0,3412	
Eau	0,8816	+ 185,5	»	0,344	
Eau	0,8661	+ 200	»	0,3440	
Isopentane	0,6385	+ 14,2	»	0,230	0,230
Isopentane	0,636	+ 17	»	0,230	
Hexane normal	0,663	— 17	»	0,229	
Isobutyle	0,635	— 10	»	0,230	
Amylène ordinaire (³)	0,678	0	»	0,238	
Isoamylène (⁴)	0,670	0	»	0,237	
Octylène normal	0,7217	— 17	0,240	0,2417	
Diallyle	0,684	— 14	»	0,238	0,239
Diallyle	0,6456	+ 58	»	0,2395	
Dibutyle	0,7057	0	0,235	0,2355	0,236
Dibutyle	0,694	— 18	»	0,237	
Toluène	0,8841	0	0,295	0,287	
Thiophène	1,062	+ 23	0,354	0,354	
Oxyde de méthyléthyle	0,7708	+ 8	»	0,283	
Chlorure de méthyle	0,9520	0	»	0,355	0,354
Chlorure de méthyle	0,9283	+ 13	»	0,354	
Chlorure de méthyle	0,9197	+ 17	»	0,354	

(¹) La densité critique du brome est sensiblement la moyenne arithmétique de celles du chlore et de l'iode.

(²) La propylamine a exactement la même densité critique que l'éthylamine, son homologue inférieur.

(³) Ou triméthyléthylène.

(⁴) Ou isométhyléthyléthylène.

Corps.	δ.	t°.	$\frac{\delta}{3} = \Delta$.	$\frac{\delta}{2(2-m)} = \Delta$.	
Chlorure de méthylène..........	1,3604	0°	»	0,462	
Chloroforme....................	1,480	+ 18	»	0,507	
Chlorure d'éthyle..............	0,920	0	»	0,328	
Bromure d'éthyle...............	1,4733	0	»	0,503	
Chlorure d'éthylène............	1,2802	0	0,427	0,4236	
Chlorure d'éthylène............	1,256	+ 12	»	0,422	0,422
Chlorure d'éthylène............	1,247	+ 18	»	0,422	
Chlorure d'éthylène............	1,1356*	+ 85,5	»	0,419	
Chlorure d'éthylidène..........	1,204	0	0,401	0,406	
Chlorure d'éthylidène..........	1,189	+ 4,3	»	0,403	0,405
Chlorure d'éthylidène..........	1,107*	+ 57,8	»	0,405	
Chlorure de propyle............	0,9156	0	»	0,316	
Chlorure d'allyle..............	0,934	0	»	0,318	
Alcool allylique...............	0,8709	0	0,290	0,2905	
Alcool allylique...............	0,8604	+ 13	»	0,292	
Alcool allylique...............	0,8507	+ 25	»	0,293	0,294
Alcool allylique...............	0,8183	+ 62	»	0,295	
Alcool allylique...............	0,7883	+ 93,5	»	0,297	
Formiate de méthyle............	0,9928	0	0,331	0,345	0,346
Formiate de méthyle............	0,9664	+ 22	»	0,347	
Formiate d'éthyle..............	0,9356	0	»	0,320	0,321
Formiate d'éthyle..............	0,9188	+ 17	»	0,322	
Formiate de propyle............	0,9188	0	0,306	0,308	
Formiate de propyle............	0,8761	+ 38,5	»	0,3085	0,308
Formiate de propyle............	0,835	+ 72,5	»	0,308	
Formiate d'isobutyle...........	0,8637	+ 22	»	0,295	
Formiate d'amyle...............	0,8743	+ 21	0,291	0,293	
Acétate de méthyle.............	0,9562	0	»	0,327	
Acétate de méthyle.............	0,919	+ 22	»	0,324	0,326
Acétate de méthyle.............	0,8825	+ 55	»	0,326	
Acétate d'éthyle...............	0,9239	0	0,308	0,313	
Acétate d'éthyle...............	0,8875	+ 29,4	»	0,312	0,3125
Acétate d'éthyle...............	0,8613	+ 50,3	»	0,312	
Acétate d'éthyle...............	0,8300*	+ 75,5	»	0,313	
Acétate de propyle.............	0,9100	0	0,303	0,299	
Acétate de propyle.............	0,8992	+ 15	»	0,294	
Acétate de propyle.............	0,8927	+ 42,5	»	0,298	0,299
Acétate de propyle.............	0,8128	+ 84,6	»	0,295	
Acétate de propyle.............	0,7917*	+101,5	»	0,296	
Acétate de butyle normal.......	0,8718	+ 23	0,291	0,293	
Acétate d'isobutyle............	0,8921	0	0,297	0,294	
Acétate d'isobutyle............	0,8709	+ 21	»	0,295	0,294
Acétate d'isobutyle............	0,7589	+112,7	»	0,290	
Acétate d'amyle................	0,8963	0	0,299	»	
Acétate de β hexyle............	0,8778	0	0,293	»	
Acétate d'œnanthyle............	0,8707	»	0,290	»	
Acétate d'octyle...............	0,8712	+ 16	0,290	»	
Propionate de méthyle..........	0,9578	+ 4	0,319	0,3235	0,319
Propionate de méthyle..........	0,9113	+ 22	»	0,316	

Corps.	δ.	t°.	$\frac{\delta}{3} = \Delta$.	$\frac{\delta}{2(2-m)} = \Delta$.	
Propionate d'éthyle	0,914	0°	0,305	0,303	0,303
Propionate d'éthyle	0,8945	+ 17	»	0,303	
Propionate d'éthyle	0,8625	+ 45,1	»	0,3025	
Propionate d'éthyle	0,7934*	+100	»	0,301	
Propionate de propyle	0,9022	0	0,301	0,295	0,295
Propionate de propyle	0,8498	+ 51,27	»	0,295	
Propionate de propyle	0,7944*	+100,6	»	0,295	
Propionate de propyle	0,763*	+124,75	»	0,293	
Propionate de butyle normal	0,8828	+ 15	0,294	»	
Propionate d'isobutyle	0,8926	0	0,297	0,2906	0,290
Propionate d'isobutyle	0,8437	+ 49,2	»	0,290	
Propionate d'isobutyle	0,743*	+135,7	»	0,286	
Butyrate de méthyle	0,8971	+ 22	»	0,306	
Butyrate d'éthyle	0,9019	0	0,300	0,297	0,297
Butyrate d'éthyle	0,8779	+ 22	»	0,297	
Butyrate de propyle	0,879	+ 15	0,293	»	
Butyrate d'isopropyle	0,8787	0	0,293	»	
Butyrate de butyle normal	0,8885	0	0,296	»	
Butyrate d'isobutyle	0,8798	»	0,293	»	
Butyrate d'amyle	0,852	+ 15	0,284	»	
Isobutyrate de méthyle	0,9056	0	0,302	0,3017	0,3016
Isobutyrate de méthyle	0,8625	+ 38,6	»	0,3015	
Isobutyrate de méthyle	0,815*	+ 78,6	»	0,3016	
Isobutyrate d'éthyle	0,890	0	0,297	0,2945	0,295
Isobutyrate d'éthyle	0,871	+ 18,8	»	0,295	
Isobutyrate d'éthyle	0,831*	+ 55,6	»	0,295	
Isobutyrate d'éthyle	0,7791*	+100,1	»	0,294	
Isobutyrate de propyle	0,8872	0	0,296	0,2887	0,2885
Isobutyrate de propyle	0,8402	+ 47,24	»	0,2884	
Isobutyrate d'isobutyle	0,872	0	0,291	»	
Valérianate de méthyle	0,8789	+ 21	0,293	0,297	
Valérianate d'éthyle	0,894	0	0,298	0,294	0,295
Valérianate d'éthyle	0,876	+ 20	»	0,2955	
Valérianate d'éthyle	0,8616	+ 40	»	0,2975	
Valérianate d'éthyle	0,832	+ 55,7	»	0,293	
Valérianate de propyle	0,887	0	0,296	»	
Valérianate d'octyle	0,864	+ 16	0,288	»	
Caproate de méthyle	0,8977	+ 18	0,299	»	
Caproate d'éthyle	0,882	»	0,294	»	
Œnanthylate de méthyle	0,887	+ 8	0,296	»	
Œnanthylate d'éthyle	0,8879	0	0,296	»	
Œnanthylate d'heptyle	0,870	+ 16	0,290	»	
Caprylate de méthyle	0,882	»	0,294	»	
Caprylate d'éthyle	0,8738	+ 15	0,291	»	
Caprylate d'octyle	0,8625	+ 16	0,287	»	
Nonylate de méthyle	0,8765	+ 17,5	0,292	»	
Nonylate d'éthyle	0,7655	+ 17,5	0,288	»	
Acétone	0,814	0	»	0,2785	0,278
Acétone	0,7921	+ 18	»	0,278	

Corps.	δ.	$t°$.	$\frac{\delta}{3} = \Delta$.	$\frac{\delta}{2(2-m)} = \Delta$.	
Méthylal	0,8551	»	0,285	»	
Acétal	0,821	+ 22°,4	»	0,285	
Acide formique	1,2227	0	0,408	»	
Acide propionique	1,0143	0	0,338	0,326	
Acide propionique	0,992	+ 18	»	0,325	0,326
Acide propionique	0,9607	+ 49,6	»	0,326	
Acide propionique	0,9062*	+ 99,8	»	0,326	
Acide butyrique normal	0,998	0	0,329	»	
Acide isobutyrique	0,9697	0	0,323	»	
Acide valérique normal	0,9577	0	0,819	»	
Acide caproïque normal	9,9149	0	0,315	»	
Acide œnanthylique normal	0,935	0	0,312	»	
Acide caprylique	0,99	»	0,33	»	
Acide nonylique normal	0,9065	+ 17,5	0,302	»	

Dans ce Tableau, les densités critiques obtenues par la règle du tiers de la densité sont simplement données à titre de comparaison, et pour vérifier ce qui a été dit au sujet de la variation et du signe de la quantité f. On ne doit les conserver que dans les cas où la formule (2) n'a pas pu être employée, la température critique faisant défaut.

9. *Densités critiques des éthers composés.* — Le Tableau précédent montre que, tandis que la densité critique reste rigoureusement constante dans la série homologue des alcools gras saturés (depuis l'alcool méthylique jusqu'à l'alcool undécylique), elle varie au contraire très rapidement dans la série homologue correspondante des acides gras saturés. On prévoit donc que les *éthers composés,* qui sont exactement intermédiaires entre les acides et les alcools, présenteront une variation intermédiaire. La loi de cette variation est donnée par le Tableau à double entrée suivant ([1]), dans lequel les *lignes horizontales* sont les densités critiques des acides gras saturés, et des éthers qu'ils donnent en substituant à l'hydrogène du groupe CO.OH successivement le méthyle, l'éthyle, le propyle, etc. Les *colonnes verticales* donnent les séries homologues des éthers correspondant à un même alcool, et les *diagonales,* menées de gauche à droite et de bas en haut, donnent les corps *isomères* quand on condense, par des moyennes, en des colonnes uniques, les Δ des éthers des alcools isomères

([1]) Les densités critiques affectées d'un astérique sont celles que l'on a obtenues par la méthode du diamètre ou par la formule (2); les autres ont été calculées, faute de mieux, par la règle du tiers de la densité.

(propylique et isopropylique, butylique et isobutylique) et qu'on fait de même pour les lignes 4 et 4'.

Éthers.	H.	Méthyle.	Éthyle.	Propyle.	Isopropyle.	Butyle.	Isobutyle.	Amyle.	β Hexyle.	Heptyle.	Octyle.
1. Formiates....	0,408	0,346*	0,321*	0,308*	»	»	0,295*	0,293*	»	»	»
2. Acétates......	0,351*	0,326*	0,3125*	0,299*	»	0,293*	0,294*	0,299	0,293	0,290	0,290
3. Propionates...	0,326*	0,319*	0,306*	0,295*	»	0,294	0,290*	»	»	»	»
4. Butyrates.....	0,329	0,306*	0,297*	0,293	0,293	0,296	0,293	0,284?	»	»	»
4'. Isobutyrates ..	0,323	0,302*	0,295*	0,289*	»	»	0,293	»	»	»	»
5. Valérianates...	0,319	0,297*	0,295*	0,296	»	»	»	»	»	»	0,288
6. Caproates.....	0,316	0,299	0,294	»	»	»	»	»	»	»	»
7. Œnanthylates.	0,312	0,296	0,296	»	»	»	»	»	»	0,290	»
8. Caprylates....	0,330?	0,294	0,291	»	»	»	»	»	»	»	0,287
9. Nonylates.....	0,302	0,292	0,288	»	»	»	»	»	»	»	»

La continuité à peu près parfaite avec laquelle varient les nombres du Tableau précédent lorsqu'on les lit en longueur, en largeur, ou en diagonale constitue un phénomène intéressant, et il est permis d'affirmer que les irrégularités mises en évidence par le Tableau, comme par exemple celles de l'acide caprylique et du butyrate d'amyle, disparaîtront dès que la température critique de ces corps sera connue et qu'on pourra calculer Δ par la formule (2).

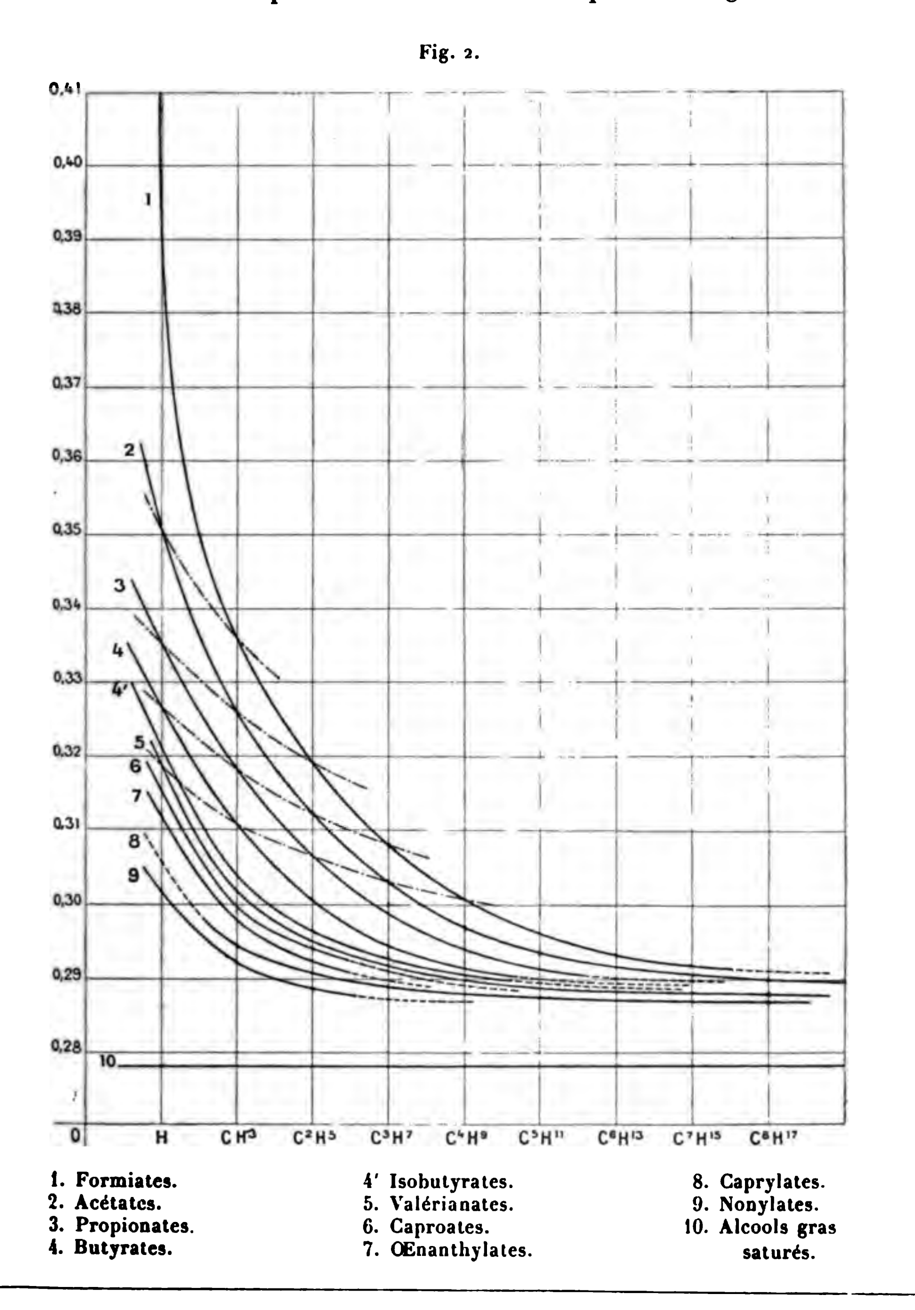
Pour un même acide, à mesure que le poids du radical alcoolique augmente, la densité critique diminue et tend vers une limite. A mesure que le poids de l'acide augmente, sa densité critique diminue, et l'amplitude du décroissement de la densité critique des éthers qu'il forme diminue aussi. On prévoit donc que les acides gras saturés d'ordre très élevé, tels que les acides cérotique et mélissique, donneront des éthers dont les densités critiques sont à peu près rigoureusement constantes. La valeur constante obtenue ainsi sera très voisine de celle de la densité critique des alcools gras saturés.

Quant aux éthers isomères (en y comprenant les acides), leur densité critique diminue régulièrement à mesure que le poids du résidu alcoolique augmente et que celui de l'acide diminue. La rapidité de cette variation paraît diminuer lorsque le poids de la molécule augmente, les éthers composés isomères, d'un poids moléculaire très élevé, ayant une densité critique sensiblement constante.

Une construction graphique simple fera saisir, d'un coup d'œil, ces lois de variation. Portons en ordonnées les densités critiques du Tableau précé-

dent (¹) et en abscisses des valeurs équidistantes, qui représenteront l'accroissement constant du poids de la molécule lorsqu'elle s'augmente de CH^2.

Fig. 2.



(¹) En prenant la moyenne des Δ des éthers provenant soit d'alcools isomères, soit d'acides isomères. Les courbes de la *fig.* 2 ont été tracées alors que l'on ne connaissait pas encore tous les Δ susceptibles d'être obtenus par la formule (2) et que l'on ne disposait

Les points obtenus ainsi pour les éthers d'un même acide sont situés sur une courbe parfaitement continue, qui admet de toute évidence une asymptote horizontale. Les courbes, d'apparence hyperbolique, obtenues pour les différents acides ne se coupent pas, mais se placent les unes au-dessus des autres avec une régularité parfaite, et tendent évidemment à devenir rectilignes lorsque le poids moléculaire de l'acide est grand.

La densité critique des éthers isomères est donnée par les courbes figurées en traits mixtes, et dont les quatre premières seulement sont tracées pour ne pas embrouiller la *fig.* 2.

En ce qui concerne la densité critique des *éthers composés*, il est impossible de passer sous silence le consciencieux travail expérimental de Nadejdin sur ce sujet. Sans répéter ce que j'ai déjà dit au sujet de la détermination directe de Δ, je donne dans le Tableau suivant les nombres expérimentaux de Nadejdin : d est la densité du liquide à t° (généralement 22°), v est le rapport du volume critique au volume du liquide à t°; il s'ensuit que la densité critique Δ m'est donnée par le rapport $\frac{d}{v}$. On remarquera l'extrême similitude qui existe entre cette manière de calculer Δ et celle de la formule (2). Dans l'avant-dernière colonne, j'ai mis les températures critiques centigrades θ déterminées par Nadejdin, et dont je me suis servi pour calculer Δ par la formule (2) en utilisant les densités d à 22°; ces valeurs de Δ forment la dernière colonne.

Corps.	d.	t°.	v.	$\frac{d}{v} = \Delta$.	θ.	$\frac{d}{2(2-m)} = \Delta$.
Formiate de méthyle.....	0,9664	22°	2,82	0,3414	212°	0,3472
Formiate d'éthyle.......	0,9015	22	2,86	0,3152	233,1	0,3181
Formiate de propyle	0,8940	22	2,93	0,3051	260,8	0,3088
Formiate d'isobutyle	0,8637	22	3,00	0,2880	278,2	0,2948
Formiate d'amyle	0,8736	21	3,10	0,2816	302,6	0,2933
Acétate de méthyle	0,9294	22	2,90	0,3205	232,9	0,3279
Acétate d'éthyle.........	0,8979	22	3,00	0,2993	249,5	0,3127
Acétate de propyle......	0,8866	21	3,06	0,2897	276,3	0,3026
Acétate d'isobutyle......	0,8709	21	3,10	0,2809	288,3	0,2949
Propionate de méthyle...	0,9113	22	3,05	0,2988	255,7	0,3159
Propionate d'éthyle......	0,8915	21	3,12	0,2857	272,4	0,3050
Butyrate de méthyle.....	0,8971	22	3,08	0,2912	278,0	0,3062
Butyrate d'éthyle	0,8779	22	3,18	0,2760	292,8	0,297
Isobutyrate d'éthyle.....	0,8685	22	3,15	0,2757	280,4	0,296
Valérianate de méthyle ..	0,8789	21	3,15	0,2790	293,7	0,2967
Oxyde de méthyléthyle ..	0,7708	8	2,51	0,3071	168,4	0,2827
Chlorure d'éthylène	1,1740	20	2,80	0,4193	288,4	0,3971

---

presque uniquement que des Δ calculés par le tiers de la densité. Les courbes déterminées par les densités critiques qui figurent au Tableau précédent, quoique un peu différentes de celles de la *fig.* 2, jouissent des mêmes propriétés et conduisent aux mêmes conclusions.

j'ai dit que l'*on retrouvait l'équation caractéristique de la formule de Van der Waals*. J'entends par là que, le second membre restant le même, le premier membre, qui est le produit de deux binômes, *contient toujours le facteur* $(3n - 1)$ auquel j'attache une importance prépondérante, l'autre étant un peu modifié. Il en est de même pour l'isotherme réduite qui résulte de la formule très générale que j'ai donnée plus loin. E. M.

SUR LES

CONGRUENCES DE DROITES

ET SUR LA THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Les résultats acquis sur la théorie des surfaces semblent mettre en évidence l'importance qu'il y aurait à la considérer comme une application de la théorie des systèmes d'éléments. Le premier de ces systèmes d'éléments, la congruence de droites, est celui qui a été employé jusqu'ici de la façon la plus étendue. Des théories bien connues, telles que celle de la courbure des surfaces, ne sont que le résultat de l'étude de la congruence formée par les normales d'une surface. Les différentes équations dont on a fait dépendre le problème de la déformation d'une surface, comme aussi celles relatives à la déformation infinitésimale, ne sont autres que les équations qui permettent de déterminer certaines congruences dérivées de la surface.

Le but principal de l'étude présente est de poser les bases de nombreuses applications de la théorie des congruences de droites et de développer en partie une de ces applications : celle des systèmes conjugués. Nous nous bornons, dans ce premier Mémoire, à exposer les résultats qui nous ont paru les plus essentiels et parmi lesquels nous signalerons ceux qui suivent.

On trouvera, dans la première Partie, deux systèmes de formules (C) et (D), résultant de l'introduction des symboles de M. Christoffel relatifs à

une forme différentielle quadratique, et qui constituent un complément indispensable aux formules (A) et (B) des *Leçons* de M. Darboux; une première application de ces formules est faite dans la deuxième Partie à l'établissement des conditions satisfaites par l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses asymptotiques et à la démonstration du théorème de M. Dini sur la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

Dans la troisième Partie, on aborde l'étude des congruences de droites, basée sur l'introduction de la *représentation sphérique de leurs développables* (¹). En menant par le centre d'une sphère de rayon 1 la parallèle à une droite de la congruence, on obtient sur la sphère un point qui est dit la *représentation sphérique de la droite*. Aux développables de la congruence correspondent ainsi sur la sphère des courbes qui en constituent la représentation sphérique. En particulier, si l'on considère une congruence formée de normales à une surface S, la représentation sphérique des développables de cette congruence sera identique à la représentation sphérique des lignes de courbure de S. M. Guichard a montré que la représentation sphérique des développables d'une congruence peut former un système de courbes quelconque, et que, quand ce système est donné, la détermination des congruences correspondantes se fait à l'aide de l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f\right)\rho = 0,$$

à laquelle satisfait la demi-distance ρ entre les points focaux d'une droite de la congruence, les coefficients de cette équation ne dépendant que de la représentation sphérique donnée. Après avoir retrouvé les résultats de M. Guichard, nous donnons une solution nouvelle de ce problème traité par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons* : *Déterminer toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué*. Nous ramenons la question à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ; d'où résulte la généralisation suivante d'un

(¹) A. RIBAUCOUR, *Étude des Élassoïdes*, § 188. — C. GUICHARD, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VI).

théorème bien connu relatif aux congruences formées de normales à une surface :

Le problème de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables d'une congruence donnée équivaut à celui de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables que cette congruence.

Le problème de déterminer toutes les enveloppes de sphères, telles que leurs cordes de contact forment une congruence qui soit la congruence donnée, se ramène également, conformément à un théorème de M. Darboux, à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ.

La quatrième Partie traite des réseaux conjugués et constitue, en partie, le développement de deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en octobre 1891; on y établit que les différentes équations dont on a fait dépendre le problème de la déformation d'une surface comme aussi celles relatives à la déformation infinitésimale ne sont autres que les équations qui permettent de déterminer certains réseaux conjugués tracés sur la surface.

I. — FORMULES GÉNÉRALES. LES SYMBOLES $\begin{Bmatrix} r\ s \\ k \end{Bmatrix}$ DE M. CHRISTOFFEL.

1. *Rappel des systèmes de formules* (A) *et* (B) *de M. Darboux; définition des symboles de M. Christoffel.* — Considérons deux surfaces (M) et (N) se correspondant point par point, N de (N) correspondant à M de (M). Cette correspondance peut se définir de la façon suivante : nous ferons correspondre à chaque système de valeurs u, v des paramètres qui fixent la position du point M sur (M) un trièdre trirectangle (T) dont l'axe des z soit la normale en M à (M), et nous nous donnerons les coordonnées x, y, z du point N par rapport à ce trièdre. Si l'on donne à u, v les accroissements du, dv, le point N vient occuper une position infiniment voisine de la première et les projections δx, δy, δz du déplacement de ce point sur les axes du trièdre mobile (T) sont données par les formules

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \delta x = dx + \xi\,du + \xi_1\,dv + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ \delta y = dy + \eta\,du + \eta_1\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ \delta z = dz \qquad\qquad\qquad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv\ x, \end{cases}$$

dans lesquelles les fonctions $p, \ldots, \xi, \ldots$ satisfont au système

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p}{\partial v}-\dfrac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-rq_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}-\dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta r_1-r\eta_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v}-\dfrac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-pr_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}-\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}=r\xi_1-\xi r_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v}-\dfrac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-qp_1, & p\eta_1-\eta p_1+\xi q_1-q\xi_1=0. \end{array}\right.$$

Ces fonctions $p, \ldots, \xi, \ldots$ sont déterminées dès que l'on connaît la surface (M) et la façon dont le trièdre (T) lui est lié et inversement; à tout système de telles fonctions, satisfaisant aux équations (A), correspond une seule surface (M).

Nous allons adjoindre aux formules (A), (B) de nouveaux systèmes fondés sur l'emploi des symboles de M. Christoffel.

Étant donnée une forme différentielle quadratique

$$\sum\sum \omega_{rs}\,dx_r\,dx_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n;\ \omega_{rs}=\omega_{sr}).$$

M. Christoffel a introduit les notations suivantes [1]

$$\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s\ r \\ i \end{bmatrix}=\frac{\partial \omega_{ir}}{\partial x_s}+\frac{\partial \omega_{is}}{\partial x_r}-\frac{\partial \omega_{rs}}{\partial x_i},$$

$$\begin{Bmatrix} r\ s \\ k \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s\ r \\ k \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Omega_{ik}}{\Omega}\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix},$$

où Ω est le discriminant de la forme quadratique, savoir

$$\Omega=\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \ldots & \ldots & \omega_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n1} & \ldots & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix},$$

et où Ω_{ik} est le coefficient de ω_{ik} dans ce déterminant.

2. *Introduction des symboles de M. Christoffel dérivés de l'élément linéaire d'une surface.* — Considérons, en particulier, le cas où la forme

---

(1) E.-B. Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 70, p. 46-70).

différentielle quadratique est le carré de l'élément linéaire d'une surface

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

c'est-à-dire le cas où l'on a

$$n = 2, \qquad x_1 = u, \qquad x_2 = v,$$
$$\omega_{11} = E, \qquad \omega_{12} = F, \qquad \omega_{22} = G,$$

et calculons les différents symboles. On aura

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right),$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right), \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Les symboles $\begin{Bmatrix} r & s \\ & k \end{Bmatrix}$, pour lesquels nous emploierons également la notation adoptée par M. Voss dans un Mémoire (¹) sur lequel nous aurons l'occasion de revenir, sont définis par les formules

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad A_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-E\dfrac{\partial E}{\partial v} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad B_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$C = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad C_1 = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}$$

ou encore par le système

$$FA + GA_1 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad EA + FA_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},$$
$$FB + GB_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad EB + FB_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$
$$FC + GC_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}, \qquad EC + FC_1 = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

(¹) A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (*Mathematische Annalen*, t. 39).

Ces définitions posées, on établit sans difficulté le système suivant dont nous ferons constamment usage

$$
(C)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\xi}{\partial u} - \eta r = A\xi + A_1\xi_1,\\[2mm]
\dfrac{\partial\eta}{\partial u} + \xi r = A\eta + A_1\eta_1,\\[2mm]
\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} - \eta_1 r = \dfrac{\partial\xi}{\partial v} - \eta r_1 = B\xi + B_1\xi_1,\\[2mm]
\dfrac{\partial\eta_1}{\partial u} + \xi_1 r = \dfrac{\partial\eta}{\partial v} + \xi r_1 = B\eta + B_1\eta_1,\\[2mm]
\dfrac{\partial\xi_1}{\partial v} - \eta_1 r_1 = C\xi + C_1\xi_1,\\[2mm]
\dfrac{\partial\eta_1}{\partial v} + \xi_1 r_1 = C\eta + C_1\eta_1.
\end{cases}
$$

Si l'on pose

$$H = \xi\eta_1 - \eta\xi_1,$$

on en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial \log H}{\partial u} = B_1 + A, \qquad \frac{\partial \log H}{\partial v} = B + C_1.$$

Les formules qui déterminent les rayons de courbure géodésique des lignes coordonnées s'écrivent

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\sqrt{E}}{\rho_{gu}} = \dfrac{H}{E}A_1,\\[2mm]
\dfrac{\sqrt{G}}{\rho_{gv}} = -\dfrac{H}{G}C.
\end{cases}
$$

Enfin on peut encore adjoindre les résultats suivants.

Posons

$$
\begin{aligned}
D &= H(p\eta - q\xi),\\
D' &= H(p_1\eta_1 - q_1\xi_1),\\
D'' &= H(p\eta_1 - q\xi_1) = H(p_1\eta - q_1\xi).
\end{aligned}
$$

Les coordonnées rectangulaires X, Y, Z du point M de la surface satis-

font aux équations [1]

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \dfrac{D}{H}c + A\dfrac{\partial X}{\partial u} + A_1\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{D'}{H}c + B\dfrac{\partial X}{\partial u} + B_1\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \dfrac{D''}{H}c + C\dfrac{\partial X}{\partial u} + C_1\dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

et aux analogues qu'on obtient en remplaçant X et c par Y et c' ou par Z et c''. Dans ces formules, c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface.

3. *Introduction des symboles de M. Christoffel dérivés de l'élément linéaire de la représentation sphérique.* — Considérons la représentation sphérique de la surface que nous définissons en menant par un point fixe de l'espace trois axes coordonnés parallèles aux axes de (T) et de même sens et en considérant le point m dont les coordonnées par rapport à ce nouveau trièdre (t) sont 0, 0, 1; soit

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

le carré de l'élément linéaire de la sphère décrite par le point m et rapportée au système (u, v). On aura

$$e = p^2 + q^2, \qquad f = pp_1 + qq_1, \qquad g = p_1^2 + q_1^2.$$

Construisons avec la forme différentielle quadratique $d\sigma^2$ les symboles de M. Christoffel et posons

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial u} + f\dfrac{\partial e}{\partial v} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad \alpha_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-e\dfrac{\partial e}{\partial v} + 2e\dfrac{\partial f}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial u}}{2(eg - f^2)},$$

$$\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad \beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial v}}{2(eg - f^2)},$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{2g\dfrac{\partial f}{\partial v} - g\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial g}{\partial v}}{2(eg - f^2)}, \qquad \gamma_1 = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial v} + f\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial v}}{2(eg - f^2)}$$

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 251, éq. 35 et 36.

ou encore

$$f\alpha+g\alpha_1=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},\qquad e\alpha+f\alpha_1=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u},$$

$$f\beta+g\beta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u},\qquad e\beta+f\beta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$f\gamma+g\gamma_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v},\qquad e\gamma+f\gamma_1=\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Ceci posé, on établit aisément le système suivant

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial u}-qr=p\alpha+p_1\alpha_1,\\
&\frac{\partial q}{\partial u}+pr=q\alpha+q_1\alpha_1,\\
&\frac{\partial p_1}{\partial u}-q_1r=\frac{\partial p}{\partial v}-qr_1=p\beta+p_1\beta_1,\\
&\frac{\partial q_1}{\partial u}+p_1r=\frac{\partial q}{\partial v}+pr_1=q\beta+q_1\beta_1,\\
&\frac{\partial p_1}{\partial v}-q_1r_1=p\gamma+p_1\gamma_1,\\
&\frac{\partial q_1}{\partial v}+p_1r_1=q\gamma+q_1\gamma_1.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$h=pq_1-qp_1,$$

on aura

$$\frac{\partial\log h}{\partial u}=\beta_1+\alpha,\qquad \frac{\partial\log h}{\partial v}=\beta+\gamma_1.$$

Appliquons les formules (2) au cas présent; les coordonnées d'un point de la sphère par rapport à trois axes rectangulaires fixes dont l'origine est au centre de cette sphère sont $X=c$, $Y=c'$, $Z=c''$, et il vient les équations [1]

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 c}{\partial u^2}=\alpha\frac{\partial c}{\partial u}+\alpha_1\frac{\partial c}{\partial v}-ec,\\
&\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}=\beta\frac{\partial c}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial c}{\partial v}-fc,\\
&\frac{\partial^2 c}{\partial v^2}=\gamma\frac{\partial c}{\partial u}+\gamma_1\frac{\partial c}{\partial v}-gc,
\end{aligned}\right.$$

et les analogues obtenues en remplaçant c soit par c', soit par c''.

---

[1] C. Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences*

Si l'on appelle toujours X, Y, Z les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point M de la surface (M) par rapport aux trois axes fixes, on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{p_1\xi + q_1\eta}{h}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{p\xi + q\eta}{h}\frac{\partial c}{\partial v},\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= -\frac{p_1\xi_1 + q_1\eta_1}{h}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{p\xi_1 + q\eta_1}{h}\frac{\partial c}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

et les analogues obtenues en remplaçant X et c par Y et c' ou par Z et c''.

II. — Surfaces rapportées a leurs asymptotiques.

4. *Élément linéaire correspondant aux asymptotiques* (¹). — L'élément linéaire d'une surface non développable étant donné sous la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

cherchons si les lignes coordonnées peuvent être les asymptotiques de l'une des surfaces résultant de la déformation de la proposée.

Pour une telle surface, on devra avoir

$$p\eta - q\xi = 0, \qquad p_1\eta_1 - q_1\xi_1 = 0.$$

Ces conditions permettent de poser

$$p = \lambda\xi, \qquad q = \lambda\eta, \qquad p_1 = \mu\xi_1, \qquad q_1 = \mu\eta_1.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les deux relations de la troisième ligne du système (A), on trouve

$$\lambda + \mu = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \lambda\mu(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

Si l'on pose

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial u} - \dfrac{\partial r}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}} = \sqrt{-\frac{1}{RR'}},$$

---

rapportées à leurs développables (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VI, p. 336). — L. Bianchi, *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, t. XVIII, p. 305).

(¹) G. Darboux, *Leçons*, t. III, p. 283. — A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, § 19 et suiv.

on a

$$\lambda = -\mu = k :$$

λ, μ sont donc complètement définis au moyen de E, F, G.

Les deux premières équations de droite de (A) donneront r, r_1; il reste à exprimer que les deux premières équations de gauche sont satisfaites, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial(k\xi)}{\partial v} + \frac{\partial(k\xi_1)}{\partial u} = \quad k(\eta r_1 + r\eta_1),$$

$$\frac{\partial(k\eta)}{\partial v} + \frac{\partial(k\eta_1)}{\partial u} = - k(r\xi_1 + \xi r_1)$$

ou, en tenant compte des formules (C),

$$\xi_1\left(\frac{\partial \log k}{\partial u} + 2B_1\right) + \xi\left(\frac{\partial \log k}{\partial v} + 2B\right) = 0,$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial \log k}{\partial u} + 2B_1\right) + \eta\left(\frac{\partial \log k}{\partial v} + 2B\right) = 0$$

ou, enfin,

$$\frac{\partial \log k}{\partial u} = -2B_1, \qquad \frac{\partial \log k}{\partial v} = -2B.$$

Telles sont les deux équations de condition entre E, F, G pour que le problème proposé soit possible.

5. *La représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.* — Soit

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

la formule qui donne l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1 rapportée au système (u, v) qui est la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

Supposons que l'on connaisse p, q, p_1, q_1; les deux premières formules de gauche de (A) donneront r, r_1; la troisième sera satisfaite et exprimera que l'élément linéaire $d\sigma$ convient à une surface à courbure totale égale à 1; ξ, ξ_1, η, η_1 seront déterminés par les formules

$$\xi = \frac{p}{k}, \qquad \xi_1 = -\frac{p_1}{k}, \qquad \eta = \frac{q}{r}, \qquad \eta_1 = -\frac{q_1}{k},$$

où k est une inconnue auxiliaire définie par le système que l'on obtient en exprimant que les deux premières équations de droite de (A) sont satisfaites, savoir

$$\frac{\partial \frac{p}{k}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{p_1}{k}}{\partial u} = \frac{1}{k}(qr_1 + rq_1),$$

$$\frac{\partial \frac{q}{k}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{q_1}{k}}{\partial v} = -\frac{1}{k}(rp_1 + pr_1).$$

Ce système se déduit de celui considéré au numéro précédent en remplaçant respectivement

$$\xi, \quad \xi_1, \quad k$$

par

$$p, \quad p_1, \quad \frac{1}{k},$$

et, par conséquent, il se transforme, en vertu des formules (D), dans le suivant

(5) $$\frac{\partial \log k}{\partial u} = 2\beta_1, \qquad \frac{\partial \log k}{\partial v} = 2\beta.$$

On a donc ce théorème, dû à M. Dini [1] :

Pour qu'un système de courbes tracées sur la sphère soit la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface, il faut et il suffit que ce système soit tel que l'on ait

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v}.$$

Si cette condition est vérifiée, les formules (5) déterminent k, à un facteur constant près; toutes les surfaces correspondantes sont identiques à l'une d'elles, à l'homothétie près.

Toutefois il y a deux cas distincts à considérer.

Si le système (u, v) tracé sur la sphère est entièrement connu, c'est-

---

[1] U. Dini, *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni* (*Annali di Matematica*, série II, t. IV, p. 183).

à-dire si l'on a les expressions des cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la surface cherchée en fonction de u et de v, le problème sera ramené aux quadratures.

Mais, si les expressions de p, q, p_1, q_1 sont seules connues, la détermination de c, c', c'' exigera encore l'intégration d'une équation de Riccati.

Il est facile, dans le premier cas, de donner les formules déterminant les coordonnées cartésiennes rectangulaires X, Y, Y d'un point de la surface : les équations (4) deviennent en effet, dans le cas actuel,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{f}{kh}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{e}{kh}\frac{\partial c}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{g}{kh}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{f}{kh}\frac{\partial c}{\partial v}.$$

On a des formules analogues pour Y et Z.

III. — Les congruences de droites rapportées a leurs développables et la représentation sphérique.

6. *Formules générales.* — Définissons une congruence de droites, de la façon suivante [1] :

Soit (T) ou $Mxyz$ un trièdre trirectangle dont la position dépend de deux paramètres u et v et dont le sommet M décrit une surface (M) normale à l'axe des z ; x, y étant deux fonctions de u et v, faisons correspondre à chaque position du trièdre (T) une droite parallèle à l'axe des z de ce trièdre, les coordonnées du pied de cette droite sur le plan des xy étant les valeurs des fonctions x, y. L'ensemble des droites ainsi obtenues constituera la congruence la plus générale.

Supposons que les paramètres u et v soient choisis de façon que la congruence soit rapportée à ses développables, c'est-à-dire de façon que, lorsque l'on donne à u ou à v des valeurs constantes, les surfaces réglées correspondantes de la congruence soient développables. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, en désignant par z_1 et z_2 les cotes des points

[1] A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*; Chapitre IV.

focaux F_1 et F_2, les équations

$$\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + q z_1 - r y = 0, \qquad \xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z_2 - r_1 y = 0,$$
$$\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r x - p z_1 = 0, \qquad \eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z_2 = 0,$$

qui expriment que les déplacements de F_1 et de F_2, correspondant respectivement à $v =$ constante et à $u =$ constante, s'effectuent suivant la droite.

Posons

$$z_2 + z_1 = 2 z_m, \qquad z_2 - z_1 = 2\rho,$$
$$\xi' = \xi - q\rho, \qquad \xi'_1 = \xi_1 + q_1\rho,$$
$$\eta' = \eta + p\rho, \qquad \eta'_1 = \eta_1 - p_1\rho.$$

En vertu d'un calcul bien connu, qui consiste à écrire que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ déduites du système précédent sont égales, ainsi que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$, les inconnues x, y, z_m sont déterminées par le système

$$(6)\quad \begin{cases} \xi' + \dfrac{\partial x}{\partial u} + q z_m - r y = 0, & \xi'_1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} + q_1 z_m - r_1 y = 0, \\ \eta' + \dfrac{\partial y}{\partial u} + r x - p z_m = 0, & \eta'_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x_m - p_1 z_m = 0, \\ \zeta' + \dfrac{\partial z_m}{\partial u} + p y - q x = 0, & \zeta'_1 + \dfrac{\partial z_m}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0, \end{cases}$$

auquel il faut adjoindre les relations [1]

$$\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \frac{\partial \xi'_1}{\partial u} = q\zeta'_1 - q_1\zeta' - r\eta'_1 + r_1\eta',$$
$$\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial \eta'_1}{\partial u} = r\xi'_1 - r_1\xi' - p\zeta'_1 + p_1\zeta',$$
$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi',$$

qui déterminent ζ', ζ'_1 et l'inconnue auxiliaire ρ.

Ces relations conduisent immédiatement, en vertu des formules (A) et

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, t. I, p. 66.

(D), aux suivantes

$$\zeta' = \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho, \qquad \zeta'_1 = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \beta\frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f\right)\rho = 0.$$

7. *Congruences qui admettent une représentation sphérique donnée de leurs développables.* — Particularisons ce qui précède en supposant que le trièdre (T) soit confondu avec le trièdre (t) dont le sommet est fixe; le point m, dont les coordonnées sont 0, 0, 1, décrit des courbes (u), (v) qui constituent la représentation sphérique des développables de la convergence. Donc :

On peut se donner arbitrairement la représentation sphérique des développables d'une congruence; pour déterminer la congruence correspondante, on construira un trièdre trirectangle mobile (t) à sommet fixe pour lequel les six rotations soient p, q, r, p_1, q_1, r_1; ceci fait, on intégrera l'équation (7) qui fera connaître ρ et l'on aura ensuite x, y, z_m au moyen du système

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &-q\rho + \frac{\partial x}{\partial u} + qz_m - ry = 0, & &q_1\rho + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1z_m - r_1y = 0,\\ &p\rho + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz_m = 0, & &-p_1\rho + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1x - p_1z_m = 0,\\ &\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho + \frac{\partial z_m}{\partial u} + py - qx = 0, & &-\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right) + \frac{\partial z_m}{\partial v} + p_1y - q_1x = 0. \end{aligned}\right.$$

La détermination de x, y, z_m n'est autre que celle d'un point fixe par rapport à un trièdre mobile dont les rotations sont les mêmes que celles de (t) et dont les translations sont connues en même temps que ρ; donc :

Si l'on a construit le trièdre mobile (t) et si l'on connaît ρ, la détermination de x, y, z_m n'exige que des quadratures.

M. Guichard est parvenu à des résultats équivalents aux précédents et que nous rappellerons rapidement.

Soient X_m, Y_m, Z_m les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires du point N milieu du segment F_1F_2 déterminé par les points focaux sur une droite D de la congruence; conservant les notations précédentes, les coor-

données du point F_1 seront

$$X_m - \rho c, \quad Y_m - \rho c', \quad Z_m - \rho c''$$

et celles du point F_2

$$X_m + \rho c, \quad Y_m + \rho c', \quad Z_m + \rho c''.$$

Les équations qui expriment que les surfaces réglées (u), (v) sont les développables de la congruence sont, par suite,

$$\frac{\partial(X_m - \rho c)}{\partial u} = -2\rho_{-1} c,$$

$$\frac{\partial(X_m + \rho c)}{\partial v} = 2\rho_1 c$$

et les analogues obtenues en remplaçant X_m, c par Y_m, c' ou par Z_m, c''.

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_m}{\partial u \partial v}$ déduites de ces équations; il vient, en vertu des équations (3), les relations

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\beta,$$

$$\rho_{-1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\beta_1,$$

$$\frac{\partial \rho_{-1}}{\partial v} + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - 2\rho f,$$

qui déterminent ρ_1, ρ_{-1} et ρ.

Éliminant ρ_1, ρ_{-1}, on voit que ρ est déterminé par l'équation (7); on a ensuite X_m, Y_m, Z_m par les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_m}{\partial u} = -\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + 2\rho\beta_1\right)c + \rho\dfrac{\partial c}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X_m}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + 2\rho\beta\right)c - \rho\dfrac{\partial c}{\partial v} \end{cases}$$

et par les analogues relatives à Y_m, Z_m.

8. *Autre solution du même problème.* — Les inconnues auxiliaires, au lieu d'être basées sur l'introduction des points focaux, peuvent être déduites de la considération des plans focaux. Les équations qui déterminent x et y

sont, d'après le § 6,

$$p\left(\xi+\frac{\partial x}{\partial u}-r\,y\right)+q\left(\eta+\frac{\partial y}{\partial u}+r\,x\right)=0,$$

$$p_1\left(\xi_1+\frac{\partial x}{\partial v}-r_1 y\right)+q_1\left(\eta_1+\frac{\partial y}{\partial v}+r_1 x\right)=0.$$

Substituons à x, y les inconnues

$$\zeta=p\,x+q\,y,$$
$$\zeta_1=p_1 x+q_1 y.$$

Ces nouvelles inconnues sont définies, en vertu des formules (D), par les équations

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u}-\alpha\zeta-\alpha_1\zeta_1+p\,\xi+q\,\eta=0,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\gamma\zeta-\gamma_1\zeta_1+p_1\xi_1+q_1\eta_1=0.$$

Si l'on suppose, comme au numéro précédent, que le trièdre (T) ait son sommet fixe, on voit que ζ, ζ_1 seront définis par le système bien simple

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u}-\alpha\zeta-\alpha_1\zeta_1=0,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\gamma\zeta-\gamma_1\zeta_1=0.$$

9. *Propriété caractéristique de l'équation adjointe à l'équation en ρ. Congruences dérivées de M. Darboux.* — L'équation (7) qui détermine ρ n'est pas une équation linéaire quelconque; car les fonctions e, f, g qui entrent dans la formation de ses coefficients sont liées par une relation. Il est bien facile de donner la propriété caractéristique de cette équation ou plutôt de son adjointe.

Cette dernière est en effet

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+f\varphi=0, \tag{10}$$

et, d'après les équations (3), elle admet comme solutions c, c', c''.

On peut alors énoncer cette proposition :

L'équation (10) *adjointe à l'équation en ρ est caractérisée par cette*

propriété d'admettre trois solutions linéairement distinctes dont la somme des carrés est égale à l'unité.

Car les trois solutions considérées seront les cosinus directeurs d'une droite que l'on pourra prendre pour axe des z d'un trièdre mobile (t).

Revenons à l'équation (7); il est facile de voir que l'application à cette équation de la méthode de Laplace correspond encore aux congruences dérivées introduites par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons*.

Supposons que les invariants

$$\mathrm{H} = \beta\beta_1 - \frac{\partial \beta_1}{\partial v} - f,$$

$$\mathrm{K} = \beta\beta_1 - \frac{\partial \beta}{\partial u} - f$$

ne soient pas nuls.

Les tangentes D^1 menées aux courbes (v) tracées sur la surface (F_2), lieu de F_2, forment une congruence dont les développables sont (u), (v); la demi-distance focale $\rho^{(1)}$ relative à une droite D^1 satisfait à une équation de la forme (7), savoir :

$$\frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial u\,\partial v} + \beta^1 \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial u} + \beta_1^1 \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta^1}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1^1}{\partial v} + f^1\right)\rho = 0.$$

Or on a

$$\rho^{(1)} = \frac{\sqrt{e + \beta_1^2}}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\beta\right).$$

On retrouve donc la transformation de Laplace.

Un calcul facile donne

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \beta^1 &= \beta^1 - \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v} + \frac{\partial \log \dfrac{\mathrm{H}}{\sqrt{e + \beta_1^2}}}{\partial v} = \beta - \frac{\partial \log \sqrt{e + \beta_1^2}}{\partial v}, \\ \beta_1^1 &= \beta_1 + \frac{\partial \log \dfrac{\mathrm{H}}{\sqrt{e + \beta_1^2}}}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

De même les tangentes D^{-1} menées aux courbes (u) tracées sur la surface (F_1), lieu de F_1, forment une congruence dont les développables sont (u), (v); la demi-distance focale $\rho^{(-1)}$ relative à une droite D^{-1} est donnée par la

formule

$$\rho^{(-1)} = \frac{\sqrt{g+\beta^2}}{K}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right).$$

Elle satisfait à une équation de la forme (7), pour laquelle les premiers coefficients sont donnés par les formules

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \beta^{(-1)} &= \beta + \frac{\partial \log \dfrac{K}{\sqrt{g+\beta^2}}}{\partial v},\\ \beta_1^{(-1)} &= \beta_1 - \frac{\partial \log K}{\partial u} + \frac{\partial \log \dfrac{K}{\sqrt{g+\beta^2}}}{\partial u} = \beta_1 - \frac{\partial \log \sqrt{g+\beta^2}}{\partial u}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons supposé que H et K ne sont pas nuls.

Si H = o, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles la nappe* (F_2) *de la surface focale se réduit à une courbe; pour les autres congruences, le second point focal de* D^1 *est à l'infini.*

La valeur de ρ, correspondant aux congruences pour lesquelles (F_2) se réduit à une courbe, est définie par l'équation

$$\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta = 0.$$

De même :

Si K = o, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles la nappe* (F_1) *se réduit à une courbe; pour les autres congruences, le second point focal de* D^{-1} *est à l'infini.*

La valeur de ρ, correspondant aux congruences pour lesquelles (F_1) se réduit à une courbe, est définie par l'équation

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1 = 0.$$

Si l'on a simultanément H = o, K = o, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles les deux nappes* (F_1) *et* (F_2) *se réduisent à des courbes.*

La demi-distance focale correspondant à de telles congruences est définie par le système

$$\frac{\partial\rho}{du}+\rho\beta_1=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho\beta=0,$$

qui est compatible, en vertu des hypothèses, et donne pour ρ une valeur unique, à un facteur constant près. Toutes les congruences correspondantes sont donc identiques à l'une d'elles, à l'homothétie près.

10. *Formules relatives aux deux nappes* (F_1) *et* (F_2) *de la surface focale.* — Soit d'abord la nappe (F_1).

Supposons qu'on donne à u et v deux systèmes d'accroissements du, dv et δu, δv, et cherchons la condition pour que les courbes qui leur correspondent sur (F_1) soient conjuguées. Les projections δx, δy, δz_1 du déplacement de (F_1), correspondant aux accroissements du, dv, sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\delta x &= -2q_1\rho\,dv,\\
\delta y &= 2p_1\rho\,dv,\\
\delta z_1 &= -2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\rho\beta_1\right)du+2\rho\beta\,dv.
\end{aligned}$$

Le plan tangent à (F_1) en F_1 a pour équation

$$p_1(X-x)+q_1(Y-y)=0.$$

La direction de son intersection avec le plan infiniment voisin, correspondant aux accroissements du, dv, est donc définie par les équations

$$p_1X+q_1Y=0,$$

$$\begin{aligned}
&p_1[(qZ-rY)\,du+(q_1Z-r_1Y)\,dv]\\
&\quad+q_1[(rX-pZ)\,du+(r_1X-p_1Z)\,dv]-X\,dp_1-Y\,dq_1=0.
\end{aligned}$$

Exprimons que cette direction est parallèle au déplacement de F_1, correspondant aux accroissements δu, δv; il vient, par un calcul facile, fondé sur l'emploi des formules (D),

$$\left(\beta_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)du\,\delta u+\gamma\,dv\,\delta v=0.$$

Telle est la relation qui définit deux directions conjuguées sur (F_1). On

en déduit, pour l'équation des asymptotiques,

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u}\right) du^2 + \gamma\, dv^2 = 0.$$

En exprimant que deux directions sont conjuguées et rectangulaires, on trouve facilement l'équation des lignes de courbure de (F_1)

$$\beta\left(\beta_1 + \frac{\partial \log \rho}{du}\right) du^2 + \left[\gamma\left(\beta_1 + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right) - (g+\beta^2)\right] du\, dv - \beta\gamma\, dv^2 = 0.$$

On peut trouver cette dernière équation et déterminer également les rayons de courbure principaux de (F_1) en F_1 par le calcul suivant :

La normale en F_1 à (F_1) est définie par les équations

$$X = x + p_1 t, \qquad Y = y + q_1 t, \qquad Z = z_1,$$

où t est un paramètre variable.

Les valeurs de t correspondant aux centres de courbure principaux et les lignes de courbure sont définies par les équations

$$\frac{\delta X}{p_1} = \frac{\delta Y}{q_1}, \qquad \delta Z = 0,$$

qui s'écrivent, en vertu des formules (D),

$$\frac{p\beta t\, du + (p\gamma t - 2q_1\rho)\, dv}{p_1} = \frac{q\beta t\, du + (q\gamma t + 2p_1\rho)\, dv}{q_1},$$

$$\left[-2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right) + (pq_1 - qp_1)t\right] du + 2\rho\beta\, dv = 0.$$

Si l'on élimine t entre ces équations, on retrouve l'équation des lignes de courbure.

Si l'on élimine du, dv, on trouve une équation du second degré en t qui détermine les centres de courbure principaux; les rayons de courbure principaux sont ainsi définis par l'équation

$$(pq_1 - qp_1)^2\gamma\frac{R_1^2}{g} - 2(pq_1 - qp_1)\rho\left[(g+\beta^2) + \gamma\left(\beta_1 + \frac{\partial\log\rho}{du}\right)\right]\frac{R_1}{\sqrt{g}}$$
$$+ 4\rho g\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right) = 0.$$

On remarquera que, si $\beta = 0$, les deux racines de cette équation sont

$$R_1 = \frac{2\rho g\sqrt{g}}{(pq_1 - qp_1)\gamma}, \qquad R'_1 = \frac{2\sqrt{g}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right)}{pq_1 - qp_1}.$$

Enfin l'élément linéaire ds_1 de la surface (F_1) est défini par la formule

$$\frac{1}{4}ds_1^2 = g\rho^2 dv^2 + \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right)du - \rho\beta\, dv\right]^2.$$

Soit maintenant la nappe (F_2).

Par des calculs identiques aux précédents, on parviendra aux résultats suivants :

La relation entre deux directions conjuguées est

$$\alpha_1 du\,\delta u + \left(\beta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)dv\,\delta v = 0.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\alpha_1 du^2 + \left(\beta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)dv^2 = 0.$$

Celle des lignes de courbure est

$$-\alpha_1\beta_1 du^2 + \left[\alpha_1\left(\beta + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right) - (e + \beta_1^2)\right]du\,dv + \beta_1\left(\beta + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)dv^2 = 0.$$

L'équation définissant les rayons de courbure principaux est

$$(pq_1 - qp_1)^2\alpha_1\frac{R_2^2}{e} - 2(pq_1 - qp_1)\rho\left[(e + \beta_1^2) + \alpha_1\left(\beta + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)\right]\frac{R_2}{\sqrt{e}}$$
$$+ 4\rho e\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right) = 0.$$

Si $\beta_1 = 0$, les deux racines de cette équation sont

$$R_2 = \frac{2\rho e\sqrt{e}}{(pq_1 - qp_1)\alpha_1}, \qquad R'_2 = \frac{2\sqrt{e}\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right)}{pq_1 - qp_1}.$$

L'élément linéaire ds_2 de la surface (F_2) est défini par la formule

$$\frac{1}{4}ds_2^2 = e\rho^2 du^2 + \left[-\rho\beta_1 du + \left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right)dv\right]^2.$$

11. *Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué* (¹). — On sait que, si les développables d'une congruence interceptent sur une surface (P_1) un réseau conjugué, cette congruence peut se construire en joignant les points P_1 de (P_1) aux points correspondants P_2 d'une surface (P_2), la correspondance étant établie par plans tangents parallèles.

Ceci rappelé, prenons sur chaque droite D de la congruence un point P_1 qui engendre une surface (P_1); cette surface (P_1) sera découpée par les développables de la congruence suivant un réseau conjugué s'il existe sur chaque droite D un point P_2 tel que les plans tangents en P_1 et P_2 aux surfaces (P_1) et (P_2) soient parallèles. Dans le cas actuel, le système (u, v) étant celui des développables de la congruence, il suffit d'écrire que les déplacements de P_1 et P_2 sont parallèles si l'on considère successivement $u =$ const., $v =$ const.

Supposons que la congruence soit définie de la façon la plus générale, comme au n° 6, au moyen d'un trièdre mobile (T) dont l'axe des z est normal à l'origine à une surface; si l'on connaît simplement la représentation sphérique des développables, il suffira de supposer, comme au n° 7, que le trièdre mobile (T) a son sommet fixe, c'est-à-dire qu'il est confondu avec le trièdre (t); cela reviendra à faire dans les formules

$$\xi = \xi_1 = \eta = \eta_1 = 0.$$

Soient $z_m + \rho\theta_1$ et $z_m + \rho\theta_2$ les cotes de P_1 et de P_2; les projections du déplacement de P_1 correspondant aux accroissements du, dv ont, en vertu des formules (B) et des équations (6), les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \delta x &= q\rho(\theta_1 + 1)\,du + q_1\rho(\theta_1 - 1)\,dv, \\ \delta y &= -p\rho(\theta_1 + 1)\,du - p_1\rho(\theta_1 - 1)\,dv, \\ \delta z &= \left[\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)\right] du + \left[\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right] dv. \end{aligned}$$

Les projections du déplacement de P_2, correspondant aux mêmes accroissements, se déduisent des précédentes en remplaçant θ_1 par θ_2.

Les équations du problème définissant les inconnues θ_1, θ_2 sont, par

(¹) DARBOUX, *Leçons*, t. II, p. 219 et suivantes.

suite,

$$\frac{q\rho(\theta_1+1)}{q\rho(\theta_2+1)}=\frac{-p\rho(\theta_1+1)}{-p\rho(\theta_2+1)}=\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u}-\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\beta_1\rho\right)}{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial u}-\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\beta_1\rho\right)},$$

$$\frac{q_1\rho(\theta_1-1)}{q_1\rho(\theta_2-1)}=\frac{-p_1\rho(\theta_1-1)}{-p_1\rho(\theta_2-1)}=\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v}+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2\beta\ \rho\right)}{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial v}+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2\beta\ \rho\right)}.$$

Elles s'écrivent

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u}-\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\beta_1\rho\right)}{\rho(\theta_1+1)}=\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial u}-\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\beta_1\rho\right)}{\rho(\theta_2+1)},$$

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v}+\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2\beta\rho}{\rho(\theta_1-1)}=\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial v}+\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2\beta\rho}{\rho(\theta_2-1)}.$$

Les deux premiers rapports égaux sont égaux à celui qui a pour numérateur la différence des numérateurs et pour dénominateur la différence des dénominateurs, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial\log\rho(\theta_1-\theta_2)}{\partial u}.$$

Les deux derniers rapports égaux sont égaux de même à

$$\frac{\partial\log\rho(\theta_1-\theta_2)}{\partial v}.$$

Substituons aux inconnues θ_1, θ_2 les nouvelles inconnues

$$\varphi=\frac{1}{\rho(\theta_1-\theta_2)};\qquad \psi=\rho\theta_1\varphi.$$

Ces dernières seront définies par le système

$$(13)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}=\ \ \ \varphi\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\beta_1\rho\right)-\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial v}=-\varphi\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2\beta\rho\right)+\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}.\end{cases}$$

Égalons les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$ qu'on obtient en différentiant; il vient,

en tenant compte de l'équation (7), à laquelle satisfait ρ,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial \varphi}{\partial v} + f\varphi = 0.$$

Telle est l'équation qui détermine φ; c'est l'équation (10) adjointe à l'équation en ρ.

Dès que φ est connu, on obtient ψ par des quadratures; si l'on se rappelle cette proposition (1) : *Étant données une équation linéaire et son adjointe, l'intégration par un procédé quelconque de l'une des deux équations entraîne comme conséquence celle de l'autre équation,* on a la généralisation suivante d'un théorème bien connu sur les congruences formées de normales à des surfaces :

Le problème de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables qu'une congruence donnée équivaut à celui de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables de cette congruence.

L'équation en φ est la même pour toutes les congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables; soit ρ la demi-distance focale d'une de ces congruences : à toute solution φ de l'équation (10) correspondent des valeurs de ψ, déterminées par les équations (13), qui ne diffèrent que par une constante; le plan tangent à l'une quelconque des surfaces obtenues est parallèle aux directions dont les coefficients directeurs sont

$$q, \quad -p, \quad -\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}$$

et

$$q_1, \quad -p_1, \quad -\frac{\partial \log \varphi}{\partial v}.$$

Ces deux directions étant indépendantes de ρ et de ψ, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Considérons les congruences admettant une représentation sphérique donnée de leurs développables; à toute solution de l'équation adjointe à l'équation en ρ correspondent pour chacune de ces congruences une in-

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. II, p. 98.

finité de surfaces découpées par les développables de cette congruence suivant un réseau conjugué; deux quelconques de ces surfaces appartenant, soit à une même congruence, soit à deux congruences différentes, ont, aux points correspondants, leurs plans tangents parallèles.

On peut remarquer que l'on connaît trois solutions particulières c, c', c'' de l'équation en φ et plus généralement les solutions définies par l'expression

$$\varphi_1 = lc + mc' + nc'',$$

où l, m, n sont des constantes; or, si l'on appelle X, Y, Z les coordonnées du point P par rapport à trois axes rectangulaires, on a en général

$$X = X_m + \frac{\psi}{\varphi} c, \qquad Y = Y_m + \frac{\psi}{\varphi} c', \qquad Z = Z_m + \frac{\psi}{\varphi} c''.$$

Dans le cas actuel où $\varphi = \varphi_1$, il vient

$$lX + mY + nZ = lX_m + mY_m + nZ_m + \psi_1,$$

ψ_1 étant défini par le système (13) dans lequel on remplace φ par φ_1.

Les deux dérivées partielles de la fonction $lX + mY + nZ$ sont nulles en vertu des formules (9); donc :

Les surfaces correspondant aux solutions φ_1 sont des plans.

12. *Congruences de Ribaucour.* — On peut se poser à l'égard de l'équation en ρ des questions analogues à celles traitées par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons* pour l'équation linéaire plus générale du second ordre.

Les congruences particulières qui se présentent tout d'abord sont celles pour lesquelles l'équation en ρ a ses invariants égaux; elles sont définies par la condition suivante

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{\partial\beta_1}{\partial v}.$$

Donc :

La représentation sphérique de leurs développables est identique à la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

M. Ribaucour (¹) les a rencontrées le premier dans le problème de la

(¹) A. Ribaucour, *Étude des Élassoïdes*, § 188.

correspondance par orthogonalité des éléments
plus loin. On les retrouve dans un grand nomb
donnerons, d'après M. Bianchi, le nom de *con*

M. Guichard a indiqué une propriété caract
qui est la suivante :

Les développables d'une congruence de R surface moyenne un réseau conjugué.

Cette propriété résulte immédiatement
dans le cas actuel une solution φ telle que
soit nulle; cette solution φ est définie par l

$$-\frac{\partial \log \frac{\varphi}{\rho}}{\partial u} = 2\beta_1, \qquad \partial$$

On rencontre les congruences de Ril
questions relatives aux congruences; p

Étant donnée une congruence, exis P_1 *et* P_2 *équidistants du milieu des tangents en* P_1 *et* P_2 *aux surfaces*

Il suffit de faire $\theta_1 = -\theta_2$ au numér
si elles existent, seront définies par l

$$\frac{\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\theta_1 + 1}$$

$$\frac{\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial v} + \beta\rho}{\theta_1 - 1}$$

Effectuant les calculs, il vient, p

$$\partial \log$$

$$\partial \log$$

On voit que le problème p
gruences de Ribaucour; pour

tenant compte de l'équation à laquelle satisfait ρ,

$$(15) \qquad \frac{\partial^2(\rho\theta)}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial v} + f\rho\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v}\right] = 0.$$

Cette équation détermine θ; on a ensuite R^2 par des quadratures. On remarquera que l'équation (15), considérée comme déterminant $\rho\theta$, se ramène à l'équation (10), adjointe à l'équation en ρ, dès qu'on en connaît une solution particulière; or une solution particulière du problème est donnée par un point fixe de l'espace. On retrouve donc ce théorème de M. Darboux :

La distance d'un point fixe de l'espace au plan tangent d'une surface qui admet le réseau (u, v) pour représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur elle, est solution de l'équation (10).

Un cas particulier remarquable est celui où l'on a

$$\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (15) est identique à l'équation (10), dans laquelle on aurait remplacé φ par $\rho\theta$.

Il est facile de donner une définition géométrique des congruences qui satisfont à la condition précédente :

Ce sont les congruences dont les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne.

En effet, les congruences considérées sont caractérisées par cette propriété que l'équation (15) admet la solution $\theta = 0$; or cette solution correspond aux sphères dont les centres sont sur l'*enveloppée moyenne*, c'est-à-dire sur la surface enveloppe du plan moyen, mené perpendiculairement à chaque droite de la congruence au point milieu du segment déterminé par les points focaux.

On peut donner une autre définition des congruences précédentes; reportons-nous au n° 7, c'est-à-dire supposons que la congruence soit définie au moyen d'un trièdre mobile (T) dont le sommet soit fixe; égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}$ obtenues en différentiant les équations de la troisième ligne du système (8), il vient, en tenant compte des autres équations,

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial z_m}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial z_m}{\partial v} + f z_m - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v}\right] = 0.$$

Donc :

Les congruences précédentes sont caractérisées par cette propriété que la distance d'un point fixe de l'espace au plan moyen satisfait à l'équation (10).

Cette proposition résulte d'ailleurs du théorème de M. Darboux et de la remarque faite précédemment.

14. *Congruences de Ribaucour dont les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne* [1]. — Introduisons la fonction k définie par les équations

$$\beta = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}.$$

La condition du problème est

$$\frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Posons, comme au n° 12,

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{k}}, \qquad H = \sqrt{k}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{1}{k}}}{\partial u\,\partial v} - f.$$

Les congruences cherchées seront telles que λ satisfera aux équations

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = H\lambda,$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

M. Guichard a signalé des congruences particulières qui satisfont à la question.

1° Supposons que la fonction H, qui est la valeur commune des invariants de l'équation en ρ, soit nulle. Parmi les congruences qui admettent la même représentation sphérique de leurs développables, il y en a alors une telle que les deux nappes (F_1) et (F_2) se réduisent à des courbes; on l'obtient (n° 9) en prenant ρ solution de

$$\frac{\partial \log\rho}{\partial u} + \beta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} + \beta = 0,$$

[1] C. Guichard, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 22 juin 1891.

c'est-à-dire solution de

$$\frac{\partial \log \rho\sqrt{k}}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \log \rho\sqrt{k}}{\partial v} = 0,$$

ou encore en prenant

$$\lambda = \text{const.}$$

Cette congruence satisfait à la question; donc :

Pour toute congruence formée de droites rencontrant deux courbes, les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne.

Considérons en particulier la congruence formée des normales à la cyclide de Dupin; on a alors le théorème suivant, dû à M. Ribaucour ([1]) :

La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

2° Supposons que k = constante, c'est-à-dire que le système (u, v) soit la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante; l'équation de condition étant satisfaite identiquement, on voit que toutes les congruences qui admettent cette représentation sphérique de leurs développables satisfont à la question. Ces congruences sont définies par les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

Nous les retrouverons plus loin; leurs développables interceptent sur les deux nappes de la surface focale les lignes de courbure; les courbes conjuguées qui leur correspondent sur l'enveloppée moyenne sont des géodésiques.

3° Cherchons s'il y a des congruences formées de normales à une surface, c'est-à-dire considérons le cas où $f = 0$.

Les deux équations en λ ont alors la solution commune

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

([1]) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 63.

La valeur de ρ correspondante est

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Elle satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} + 2\beta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + 2\beta = 0.$$

On a donc pour une congruence correspondante

$$\frac{\partial z_m}{\partial u} + py - qx = 0, \qquad \frac{\partial z_m}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0.$$

Par suite, la surface moyenne et l'enveloppée moyenne sont confondues; la surface commune est minima et la congruence est formée des normales à cette surface.

15. *Congruences cycliques.* — Nous appellerons, avec M. Bianchi ([1]), *congruence cyclique* toute congruence formée par les axes des cercles constituant un système cyclique.

Supposons toujours la congruence rapportée à ses développables et définie au moyen d'un trièdre mobile (T) dont l'origine décrit une surface normale à l'axe des z.

Considérons des cercles dont les axes sont les droites D de la congruence; en d'autres termes, considérons un cercle défini par rapport aux axes du trièdre (T) par les équations

$$\begin{aligned} X &= x + R\cos t, \\ Y &= y + R\sin t, \\ Z &= z_m + \rho\theta, \end{aligned}$$

où R et θ sont deux fonctions de u, v et où l'on suppose que x, y, z_m satisfont aux équations (6) du n° 6.

Cherchons à déterminer une fonction t de u, v telle que le point du cercle correspondant décrive une surface trajectoire orthogonale des différentes positions du cercle; cette fonction, si elle existe, sera définie par

([1]) L. Bianchi, *Annali di Matematica*, 2e série, t. XVIII et XIX.

l'équation

$$\delta X \sin t - \delta Y \cos t = 0.$$

Or on a, en vertu des formules (B) et des équations (6),

$$\delta X = dR\cos t - R\sin t\,dt + (\quad q\rho + q\rho\theta - rR\sin t)\,du + (-q_1\rho + q_1\rho\theta - r_1R\sin t)\,dv,$$
$$\delta Y = dR\sin t + R\cos t\,dt + (-p\rho - p\rho\theta + rR\cos t)\,du + (\quad p_1\rho - p_1\rho\theta + r_1R\cos t)\,dv.$$

L'équation qui détermine t est, par suite,

$$R\,dt + M\,du + M_1\,dv = 0,$$

en posant

$$M = -q\ \rho(\theta+1)\sin t - p\ \rho(\theta+1)\cos t + r\ R,$$
$$M_1 = -q_1\rho(\theta-1)\sin t - p_1\rho(\theta-1)\cos t + r_1R.$$

Écrivons la condition d'intégrabilité de cette équation, savoir

$$R\left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial M_1}{\partial u}\right) + M\left(\frac{\partial M_1}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) + M_1\left(\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) = 0.$$

En appliquant les formules (D) et posant

$$a = R\left[-q\frac{\partial\rho(\theta+1)}{\partial v} + q_1\frac{\partial\rho(\theta-1)}{\partial u} - 2(q\beta + q_1\beta_1)\rho\right] + q\rho(\theta+1)\frac{\partial R}{\partial v} - q_1\rho(\theta-1)\frac{\partial R}{\partial u},$$
$$b = R\left[-p\frac{\partial\rho(\theta+1)}{\partial v} + p_1\frac{\partial\rho(\theta-1)}{\partial u} - 2(p\beta + p_1\beta_1)\rho\right] + p\rho(\theta+1)\frac{\partial R}{\partial v} - p_1\rho(\theta-1)\frac{\partial R}{\partial u}.$$
$$c = (pq_1 - qp_1)(R^2 + \rho^2\theta^2 - \rho^2),$$

on trouve l'équation

$$a\sin t + b\cos t + c = 0.$$

Cette équation, considérée comme devant déterminer t, ne peut admettre plus de deux solutions sans être identiquement vérifiée; d'où résulte le théorème bien connu de M. Ribaucour :

Pour qu'il y ait une infinité de surfaces normales à tous les cercles, il faut que l'on ait les trois relations

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0.$$

Résolvons-les par rapport aux dérivées de R; nous obtenons le système

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{\frac{\partial \rho(\vartheta - 1)}{\partial u} - 2\beta_1\rho}{\rho(\vartheta - 1)},$$

$$\frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{\frac{\partial \rho(\vartheta + 1)}{\partial v} + 2\beta\rho}{\rho(\vartheta + 1)},$$

$$R^2 = \rho^2(1 - \vartheta^2),$$

que l'on peut remplacer par le système équivalent

$$R\frac{\partial R}{\partial u} = -\rho(\vartheta - 1)\left[\frac{\partial(\rho\vartheta)}{\partial u} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)\right],$$

$$R\frac{\partial R}{\partial u} = -\rho(\vartheta - 1)\left[\frac{\partial(\rho\vartheta)}{\partial v} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right)\right],$$

$$R^2 = \rho^2(1 - \vartheta^2).$$

La troisième de ces équations exprime que les foyers du cercle sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux F_1 et F_2, ou encore que les sphères dont les centres sont en F_1 et F_2 et qui passent par le cercle sont orthogonales [1].

Si l'on remarque que les deux premières équations sont identiques aux équations (14) du n° 13, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour [2] :

Une congruence cyclique est formée par les cordes de contact, avec leur enveloppe, de sphères telles que les points focaux de chaque corde de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact.

Remplaçons R^2 par sa valeur tirée de la troisième des équations dans les deux premières; on obtient, pour déterminer ϑ et R, le système

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta}{\partial u} &= 2\beta_1(\vartheta + 1), \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial v} &= 2\beta\,(\vartheta - 1), \\ R^2 &= \rho^2(1 - \vartheta^2). \end{aligned}\right.$$

(1) C. *Leçons*, t. II, p. 379.

(2) *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 129.

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}$ qu'on obtient en différentiant: il vient

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}\right)\theta=\frac{\partial\beta}{\partial u}+\frac{\partial\beta_1}{\partial v}-4\beta\beta_1.$$

1° Supposons que l'expression $\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}$ ne soit pas nulle; de cette dernière équation on tire θ; en portant dans les deux premières équations (16), on obtient deux conditions entre les éléments du réseau (u, v), image sphérique des développables d'une congruence cyclique.

2° Supposons que $\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}=0$, c'est-à-dire que la congruence donnée soit de Ribaucour; pour qu'elle soit cyclique, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{\partial\beta_1}{\partial v}=2\beta\beta_1.$$

Si ces conditions sont remplies, la congruence est, d'une infinité de manières, formée par les axes des cercles d'un système cyclique.

Le système (16) qui détermine θ admet, en effet, dans ce cas une solution dépendant d'une constante arbitraire. Si l'on remarque que, dans le cas actuel, $\frac{1}{k}$ est de la forme

$$\frac{1}{k}=U+V,$$

en désignant par U et V des fonctions qui ne dépendent respectivement que de u et que de v, on a, pour θ, l'expression suivante

$$\theta=\frac{V-U+a}{V+U},$$

où a désigne une constante arbitraire.

Considérons les plans des cercles des systèmes cycliques dérivés de la même congruence; le plan d'un de ces cercles touche son enveloppe en un point dont les coordonnées X, Y, $Z=z_m+\rho\theta$ s'obtiennent en adjoignant les équations

$$\frac{\partial Z}{\partial u}+pY-qX=0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v}+p_1Y-q_1X=0.$$

Le lieu de ce point, lorsque a varie, est une droite. D'ailleurs, aux développables de la congruence correspond, sur chacune des surfaces enveloppes des plans des cercles, un réseau conjugué, d'après un théorème de M. Ribaucour ([1]). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une congruence de Ribaucour (D) *est formée par les axes des cercles d'un système cyclique, elle l'est d'une infinité de manières. Les points de contact des plans des cercles avec leur enveloppe sont en ligne droite; les développables de la congruence formée par cette droite correspondent aux développables de la congruence* (D), *et découpent les surfaces enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués dont la représentation sphérique est la même que celle des développables de* (D).

Il est aisé de former une équation aux dérivées partielles de l'intégration de laquelle dépend la recherche des courbes tracées sur une sphère de rayon 1 et qui constituent la représentation sphérique des développables d'une congruence cyclique et de Ribaucour.

Supposons d'abord qu'aucune des fonctions U, V qui entrent dans l'expression de k ne se réduise à une constante; en particularisant u et v, on peut faire en sorte que

$$k=\frac{1}{u+v},$$

on aura

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_1=-\frac{1}{2(u+v)},$$

puis

$$f=-\frac{\partial[g(u+v)]}{\partial u}=-\frac{\partial[e(u+v)]}{\partial v}.$$

On peut donc exprimer e, f, g au moyen d'une fonction auxiliaire z par les formules

$$e=\frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad g=\frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial v},\qquad f=-\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$$

Substituant dans l'équation qui exprime que e, f, g sont les coefficients d'un élément linéaire à courbure totale égale à 1, on a l'équation aux dérivées partielles qui détermine z.

---

(1) A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 38.

Supposons maintenant qu'une seule des fonctions U, V soit constante, par exemple U; le réseau sphérique considéré sera caractérisé par les conditions

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=0, \qquad \beta_1=0.$$

On pourra toujours, en particularisant la variable v, faire en sorte que

$$k=\frac{1}{v},$$

et l'on aura

$$\beta=-\frac{1}{2v}, \qquad \beta_1=0;$$

d'où résulte

$$f=-v\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log(ev)}{\partial v}=0.$$

En écartant le cas où e est nul et particularisant la variable u, il vient

$$f=-v\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad e=\frac{u}{v}.$$

Substituant dans l'équation qui lie e, f, g, on a une équation aux dérivées partielles qui détermine g.

Enfin, dans le cas où U et V se réduisent à des constantes, la représentation sphérique est celle des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante.

16. *Congruences cycliques formées de normales à une surface.* — Le problème de déterminer les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique est identique à une question dont O. Bonnet a donné la solution, ainsi que nous le montrerons au n° 23.

Dans le cas actuel, on a

$$f=0, \qquad 2\beta=\frac{\partial \log e}{\partial v}, \qquad 2\beta_1=\frac{\partial \log g}{\partial u}.$$

Il faut chercher si l'on peut trouver une fonction θ satisfaisant au système

$$\frac{\partial \log\frac{1+\theta}{2}}{\partial u}=\frac{\partial \log g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log\frac{1-\theta}{2}}{dv}=\frac{\partial \log e}{\partial v},$$

e, g étant deux fonctions liées par la relation qui exprime que l'élément linéaire donné par la formule

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

convient à une surface dont la courbure totale est égale à 1.

Les deux fonctions e, g devront être de la forme

$$g = \frac{1+\theta}{2}\frac{1}{V},$$

$$e = \frac{1-\theta}{2}\frac{1}{U},$$

U et V étant respectivement des fonctions de u et de v.

On peut encore dire que la condition nécessaire et suffisante est la suivante : les fonctions e, g devront être liées par une relation de la forme

$$eU + gV = 1.$$

Nous pouvons supposer les fonctions U et V différentes de zéro; car, si U était nulle, par exemple, on aurait $0 = 1$, et les cercles du système cyclique seraient de rayon nul. En particularisant u et v, on peut faire en sorte que $U = 1$, $V = 1$, et la relation devient

$$e + g = 1,$$

ce qui signifie que le réseau (u, v) doit être la représentation sphérique des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante.

On peut donc énoncer le théorème suivant (¹) :

Les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique sont celles qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante.

Si la surface à courbure totale constante est quelconque, on a une congruence cyclique générale.

Cherchons pour quelles surfaces à courbure totale constante on obtient une congruence cyclique et de Ribaucour.

(¹) L. Bianchi, *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XIX, n° 7).

Posons

$$e = \sin^2 \omega, \qquad g = \cos^2 \omega;$$

ω sera défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Il reste à voir s'il existe des solutions de cette équation telles que l'on ait

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = 2 \beta \beta_1.$$

Or

$$\beta = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad \beta_1 = - \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

Il en résulte immédiatement que les seules solutions qui conviennent sont celles pour lesquelles

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Il suffit évidemment de se borner à

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces cherchées sont donc celles qui correspondent à une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \omega}{du^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Or, si l'on se reporte aux *Leçons* de M. Darboux (t. III, p. 378), on constate facilement que le centre de courbure principal, qui est l'extrémité du rayon de courbure principal R', décrit une droite lorsque u et v varient; en d'autres termes, les normales de la surface rencontrent une droite; donc :

Les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour sont celles qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante de

révolution; ce sont donc des surfaces moulures (¹) *obtenues par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre.*

On peut arriver encore à la même conclusion de la façon suivante : ω étant une simple fonction de u, le réseau sphérique (u, v) est isotherme et les courbes (v) sont des géodésiques. Or on sait que, si une famille de courbes isothermes est composée de cercles géodésiques, il en est de même de la famille isotherme formée par les trajectoires orthogonales : les courbes sphériques (v) sont donc des grands cercles, et les courbes (u) des petits cercles les coupant à angle droit; donc, enfin, les courbes sphériques (v) sont des grands cercles passant par les extrémités d'un diamètre de la sphère; les courbes (u) sont des petits cercles dont les plans sont perpendiculaires à ce diamètre.

17. *Congruences cycliques et de Ribaucour particulières.* — Les congruences dont la représentation sphérique des développables vérifie les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0$$

sont des congruences cycliques et de Ribaucour particulières; elles ont fait l'objet d'un Mémoire de M. Guichard (²).

Considérons une surface enveloppe des plans des cercles d'un des systèmes cycliques dérivés; le système conjugué qui correspond sur cette surface aux développables de la congruence est tel que sa représentation sphérique vérifie les deux conditions précédentes; nous verrons que ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau conjugué soit formé de géodésiques; ainsi les surfaces enveloppes des plans des cercles des systèmes cycliques dérivés de la congruence sont les surfaces considérées par M. Voss (³), et auxquelles M. Bianchi donne le nom de ***surfaces de Voss.*** Dans le cas actuel, les équations (16), qui définissent θ, admettent comme solutions particulières $\theta = 1$ et $\theta = -1$; les cercles qui correspondent à ces solutions sont de rayon nul; leurs plans passent respectivement

(¹) Darboux, *Leçons*, t. I, p. 104.

(²) C. Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VII).

(³) A. Voss, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden* (*Sitzungsberichte der K. Akademie zu München*, 3 mars 1888).

par F_2 et F_1 et enveloppent des surfaces qui constituent respectivement une nappe des développées de (F_2) et de (F_1).

Si l'on remarque enfin, avec M. Guichard, que les conditions $\beta = 0$, $\beta_1 = 0$ expriment que les développables de la congruence rencontrent (F_1) et (F_2) suivant leurs lignes de courbure, on peut énoncer le théorème qui suit :

Si les développables d'une congruence (D) *rencontrent les deux nappes de la surface focale suivant leurs lignes de courbure, leur représentation sphérique est la même que celle des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante : une telle congruence est cyclique et de Ribaucour; elle est, par suite, cyclique d'une infinité de manières; les plans des cercles enveloppent des surfaces de Voss, les points de contact étant sur une même droite; les développables de la congruence formée par cette droite correspondent aux développables de la congruence* (D), *et découpent les surfaces enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués dont la représentation sphérique est la même que celle des développables de* (D); *l'une des nappes de la développée de* (F_1) *ou de* (F_2) *est une surface de Voss.*

On peut remarquer aussi que les équations (16) admettent la solution $\theta = 0$; donc :

La surface enveloppée moyenne de la congruence est une surface de Voss.

Les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0$$

reviennent à

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Écartons le cas des congruences isotropes dans lequel e, g sont nuls, ou, plus généralement, le cas où l'un des plans focaux serait isotrope; on peut, en particularisant u et v, supposer

$$e = 1, \qquad g = 1.$$

Si l'on pose

$$f = -\cos 2\omega,$$

on a, pour déterminer ω, l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = \sin \omega \cos \omega.$$

ω étant connu, on aura ensuite ρ par l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \, \partial v} = \rho \cos 2\omega.$$

Ainsi :

Le problème de la détermination des congruences précédentes équivaut à celui de la déformation infinitésimale des surfaces à courbure totale constante.

C'est là, d'ailleurs, un point qui résultera immédiatement du numéro suivant.

18. *La déformation infinitésimale et la correspondance par orthogonalité des éléments.* — Le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (M) est, comme l'on sait, identique à celui de la détermination des surfaces (N) qui lui correspondent par orthogonalité des éléments; il nous suffira de considérer ce dernier problème.

Reportons-nous au n° 1 et cherchons les équations auxquelles doivent satisfaire x, y, z pour que deux éléments correspondants des surfaces (M), (N) soient toujours rectangulaires; il suffit d'exprimer que l'on a, quels que soient du et dv,

$$\begin{aligned}(\xi \, du + \xi_1 \, dv)\left[\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right)du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right)dv\right]\\ + (\eta \, du + \eta_1 dv)\left[\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right)du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right)dv\right] = 0,\end{aligned}$$

d'où les conditions

$$\begin{aligned}&\xi\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + q z - r y\right) + \eta\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r x - p z\right) = 0,\\ &\xi_1\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \eta_1\left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) = 0,\\ &\xi\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \xi_1\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + q z - r y\right)\\ &\quad + \eta\left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) + \eta_1\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r x - p z\right) = 0.\end{aligned}$$

Or $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ n'étant pas nul, on peut remplacer ces trois équations par le système suivant, où z_1 est une inconnue auxiliaire,

$$\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = \eta z_1, \qquad \xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = \eta_1 z_1,$$

$$\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = -\xi z_1, \qquad \eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = -\xi_1 z_1.$$

Par conséquent, de la même façon qu'au n° 6, les inconnues x, y, z sont déterminées par le système

$$\xi' + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, \qquad \xi'_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0,$$

$$\eta' + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, \qquad \eta'_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,$$

$$\zeta' + \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, \qquad \zeta'_1 + \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0,$$

où l'on a posé

$$\xi' = \xi - \eta z_1, \qquad \xi'_1 = \xi_1 - \eta_1 z_1,$$

$$\eta' = \eta + \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \eta_1 + \xi_1 z_1,$$

$$\zeta' = \frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}, \qquad \zeta'_1 = \frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}.$$

L'inconnue auxiliaire z_1 est définie par l'équation

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi'.$$

Or, si l'on suppose que le réseau (u, v) soit celui des asymptotiques de (M), on voit, en se reportant aux n°s 4 et 5, que les équations que nous venons d'obtenir se déduisent des équations (6) et (7) du n° 6 en posant

$$z_m = z, \qquad \rho = \frac{z_1}{k}.$$

Nous trouvons donc ce résultat, dû à M. Ribaucour [1] :

La recherche des surfaces, correspondant par orthogonalité des élé-

---

[1] A. RIBAUCOUR, *Étude des élassoïdes*, n° 188.

ments à une surface (M), *équivaut à la détermination des congruences qui admettent pour représentation sphérique de leurs développables celle des asymptotiques de* (M).

On peut énoncer d'une façon plus précise cette proposition sous la forme suivante, donnée également par M. Ribaucour (¹):

Soient (M) *et* (N) *deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments et considérons la congruence formée par les droites* D *menées par les points de* (N) *parallèlement aux normales de* (M). *Cette congruence est une congruence de Ribaucour dont* (N) *est la surface moyenne; les plans focaux de la droite* D *sont perpendiculaires aux asymptotes de l'indicatrice de* (N) *au point* N; *les images sphériques des développables de la congruence* (D) *sont celles des asymptotiques de* (N).

Le problème de la détermination des surfaces, correspondant à (M) par orthogonalité des éléments, se ramène, comme on le voit, à l'intégration de l'équation en z_1; le trièdre (T) étant connu, dès que z_1 sera déterminé, on n'aura plus qu'à effectuer des quadratures.

Or on peut donner de z_1 une autre interprétation que celle qui résulte de la formule précédente

$$\rho = \frac{z_1}{k}.$$

En effet, considérons le plan qui a pour équation, par rapport au trièdre (T),

$$Z = z_1.$$

Ce plan a une enveloppe qu'il touche en un point P (x_1, y_1, z_1), défini par les équations

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + p\, y_1 - q\, x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

On constate immédiatement que la droite MP qui joint ce point P au point M est parallèle à la normale à (N) en N; cette droite forme donc une congruence de Ribaucour dont (M) est la surface moyenne.

(¹) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, n° 188.

Remarquons que, par suite de la définition du point P, la congruence des droites MP intercepte, par ses développables, un réseau conjugué sur (M); l'équation en z_1 exprime simplement que la surface moyenne de cette congruence est (M).

Donc :

La recherche des surfaces, correspondant par orthogonalité des éléments à une surface (M), *équivaut à la détermination des congruences de Ribaucour qui admettent cette surface pour surface moyenne.*

C'est d'ailleurs ce qui résulte aussi du théorème de M. Ribaucour qui montre que la représentation sphérique des asymptotiques des surfaces cherchées (N) est identique à celle des développables des congruences de Ribaucour qui admettent (N) pour surface moyenne.

Nous reprendrons au n° 28 le problème sous la dernière forme et nous montrerons qu'il est équivalent à celui, traité par M. Voss, de la détermination des réseaux conjugués à invariants égaux tracés sur (M).

IV. — Les systèmes conjugués et la déformation des surfaces.

19. *Élément linéaire correspondant à un réseau conjugué.* — L'élément linéaire d'une surface non développable étant donné sous la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

cherchons si les lignes coordonnées peuvent former un réseau conjugué sur l'une des surfaces résultant de la déformation de la proposée.

Pour une telle surface, on devra avoir

$$p\eta_1 - q\xi_1 = p_1\eta - q_1\xi = 0,$$

ce qui nous permet de poser

$$p = \lambda\xi_1, \qquad q = \lambda\eta_1, \qquad p_1 = \mu\xi, \qquad q_1 = \mu\eta.$$

Portons ces valeurs dans les relations de la troisième ligne du système (A), on trouve

$$\lambda\mu = k^2,$$

en désignant par $-k^2$ la courbure totale

$$-k^2 = \frac{1}{RR'} = \frac{\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}.$$

Les deux premières équations de droite de (A) donneront r, r_1; il reste à exprimer que les deux premières équations de gauche sont satisfaites, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial(\lambda\xi_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\mu\xi)}{\partial u} - \lambda\eta_1 r_1 + \mu\eta r = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda\eta_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\mu\eta)}{\partial v} + \lambda\xi_1 r_1 - \mu\xi r = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (C),

$$\xi_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu\right) - \xi\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda\right) = 0.$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu\right) - \eta\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda\right) = 0.$$

Les inconnues λ, μ sont donc définies par le système

$$\lambda\mu = k^2,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu = 0,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda = 0,$$

dans lequel tous les coefficients s'expriment à l'aide de E, F, G.

Prenons comme inconnue auxiliaire $z = \lambda^2$; dès que z sera connu, on en déduira λ, μ par les formules

$$\lambda^2 = z, \qquad \mu = \frac{k^2}{\lambda};$$

par conséquent, à chaque valeur de z, correspondront deux surfaces symétriques l'une de l'autre.

Les équations qui déterminent z sont

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = -\dfrac{2C}{k^2}z^2 + 2\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)z. \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = -2C_1 z + 2A_1 k^2. \end{cases}$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$, obtenues en différentiant ces équations; il vient

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(2\frac{CC_1}{k^2}-\frac{\partial\frac{C}{k^2}}{\partial v}\right)z^2+\left(\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial C_1}{\partial u}-4A_1C+\frac{\partial^2\log k^2}{\partial u\,\partial v}\right)z\\&\qquad\qquad+2A_1k^2\left(A+\frac{\partial\log k^2}{\partial u}\right)-\frac{\partial(A_1k^2)}{\partial u}=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation donne les valeurs de z qui peuvent convenir à la question; considérant l'une des racines de cette équation, pour qu'elle convienne, il faudra qu'elle satisfasse aux équations (17), ce qui n'arrivera pas, en général.

Si nous convenons de ne pas regarder comme distinctes deux surfaces symétriques l'une de l'autre, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il doit y avoir, entre les coefficients E, F, G *de l'élément linéaire d'une surface* (Σ), *deux relations pour que les lignes coordonnées forment un réseau conjugué sur l'une des surfaces résultant de la déformation de* (Σ). *Si l'on trace sur* (Σ) *un réseau conjugué, il n'y aura pas de surface applicable sur* (Σ) *et pour laquelle le réseau correspondant sera conjugué, tant que le réseau donné sera quelconque.*

20. *Surfaces qui admettent une représentation sphérique donnée d'un réseau conjugué.* — Soit

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

la formule qui donne l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1, rapportée au système (u, v), qui est la représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur une surface.

Supposons que l'on connaisse p, q, p_1, q_1; les deux premières formules de gauche de (A) donneront r, r_1; la troisième sera satisfaite et exprimera que l'élément linéaire $d\sigma$ convient à une surface à courbure totale égale à 1; ξ, ξ_1, η, η_1 seront déterminés par les formules

$$\xi = \frac{p_1}{\mu},\qquad \xi_1 = \frac{p}{\lambda},\qquad \eta = \frac{q_1}{\mu},\qquad \eta_1 = \frac{q}{\lambda},$$

où λ, μ sont deux inconnues auxiliaires définies par le système qu'on obtient en exprimant que les deux premières équations de droite de (A) sont satisfaites, savoir :

$$\frac{\partial \frac{p_1}{\mu}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{p}{\lambda}}{\partial u} - \frac{q_1}{\mu} r_1 + \frac{q}{\lambda} r = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{q_1}{\mu}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{q}{\lambda}}{\partial u} + \frac{p_1}{\mu} r_1 - \frac{p}{\lambda} r = 0.$$

Ces équations se déduisent de celles considérées au numéro précédent, en remplaçant respectivement

$$\xi, \quad \xi_1, \quad \eta, \quad \eta_1, \quad \lambda, \quad \mu$$

par

$$p, \quad p_1, \quad q, \quad q_1, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\lambda}.$$

Donc, en vertu des formules (D), les inconnues λ, μ sont définies par le système

$$\frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial v} + \gamma_1 \frac{1}{\mu} - \alpha_1 \frac{1}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial u} + \alpha \frac{1}{\lambda} - \gamma \frac{1}{\mu} = 0.$$

On voit qu'on peut se donner arbitrairement la représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur une surface; la détermination des surfaces correspondantes dépend de l'intégration du système précédent.

Dès que l'on connaîtra les expressions des cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la surface, ainsi que les valeurs de λ, μ, on obtiendra les coordonnées cartésiennes rectangulaires X, Y, Z du point de la surface, au moyen de quadratures, par les formules suivantes

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{g}{h\mu}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{f}{h\mu}\frac{\partial c}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{f}{h\lambda}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{e}{h\lambda}\frac{\partial c}{\partial v},$$

ations (4), et par les analogues obtenues en rempla-
ou par Z et c''.

21. *Comparaison des symboles de M. Christoffel construits respectivement avec l'élément linéaire d'une surface rapportée à un système conjugué et avec celui de la représentation sphérique de ce système conjugué.* — Supposons que l'on remplace, dans les expressions des symboles de M. Christoffel, construits avec la forme quadratique qui est le carré de l'élément linéaire d'une surface rapportée à un système conjugué, E, F, G par leurs expressions

$$E = \frac{g}{\mu^2}, \qquad F = \frac{f}{\lambda\mu}, \qquad G = \frac{e}{\lambda^2},$$

en fonction de e, f, g et de λ, μ.

Il viendra, en tenant compte des équations du numéro précédent, auxquelles satisfont λ et μ,

$$(19) \qquad \begin{cases} A = \beta_1 - \dfrac{\partial \log\mu}{\partial u}, & A_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\beta, \\ B = \dfrac{\mu}{\lambda}\alpha_1, & B_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\gamma, \\ C = \dfrac{\mu}{\lambda}\beta_1, & C_1 = \beta - \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v}. \end{cases}$$

De même, si l'on remplace dans les expressions des symboles de M. Christoffel construits avec la forme quadratique $d\sigma^2$ du numéro précédent, qui est le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique, e, f, g par leurs expressions

$$e = \lambda^2 G, \qquad f = \lambda\mu F, \qquad g = \mu^2 E,$$

en fonction de E, F, G et de λ, μ, il vient, en tenant compte des équations du n° 19, auxquelles satisfont λ et μ,

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha = B_1 + \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u}, & \alpha_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}B, \\ \beta = \dfrac{\mu}{\lambda}A_1, & \beta_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}C, \\ \gamma = \dfrac{\mu}{\lambda}B_1, & \gamma_1 = B + \dfrac{\partial \log\mu}{\partial v}. \end{cases}$$

On aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement ces équations, d'après une

remarque faite au n° 20, en remplaçant dans les équations (19)

$$A, \quad B, \quad C, \quad A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad \lambda, \quad \mu$$

respectivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\lambda}.$$

22. *Systèmes conjugués d'une surface qui sont également conjugués sur l'une des surfaces provenant de sa déformation.* — Nous avons vu que les solutions communes aux équations (17) doivent satisfaire à l'équation (18); donc :

Si un réseau conjugué d'une surface (Σ) *est conjugué sur plus d'une surface provenant de la déformation de* (Σ), *il est conjugué sur une infinité de telles surfaces.*

1° Commençons par considérer un pareil réseau conjugué, c'est-à-dire considérons le cas où l'équation (18) est identique.

Cherchons l'image sphérique du réseau conjugué, supposé tracé sur l'une des surfaces qui correspondent aux solutions du système (17); nous avons, en appliquant les formules (19) du numéro précédent, les valeurs suivantes pour les coefficients de l'équation (18)

$$\frac{2CC_1}{k^2} - \frac{\partial \frac{C}{k^2}}{\partial v} = \frac{1}{\lambda^2}\left(2\beta\beta_1 - \frac{\partial \beta_1}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial u} - 4A_1C + \frac{\partial^2 \log k^2}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} - 4\beta\beta_1,$$

$$2A_1k^2\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \frac{\partial (A_1 k^2)}{\partial u} = \lambda^2\left(2\beta\beta_1 - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right).$$

L'image sphérique considérée est donc définie par les relations

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = 2\beta\beta_1.$$

Donc :

Si un réseau conjugué d'une surface (Σ) *est conjugué sur une infinité de surfaces provenant de la déformation de* (Σ), *sa représentation sphérique est la même que celle des développables d'une congruence cyclique et de Ribaucour, et réciproquement.*

2° Considérons maintenant un réseau conjugué d'une surface (Σ) qui reste conjugué sur une surface provenant de la déformation de (Σ), c'est-à-dire considérons le cas où les deux racines de l'équation (18) satisfont toutes deux aux équations (17).

Posons

$$N = \frac{\dfrac{2CC_1}{k^2} - \dfrac{\partial \frac{C}{k^2}}{\partial v}}{2A_1k^2\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial (A_1k^2)}{\partial u}},$$

$$2P = \frac{\dfrac{\partial A}{\partial v} + \dfrac{\partial C_1}{\partial u} - 4A_1C + \dfrac{\partial^2 \log k^2}{\partial u\,\partial v}}{2A_1k^2\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial (A_1k^2)}{\partial u}}.$$

L'équation (17) s'écrit

$$(17) \qquad N z^2 + 2Pz + 1 = 0.$$

Remplaçons d'abord dans les équations (18) les valeurs des dérivées de z tirées de (17); il vient les deux équations

$$\left(\frac{\partial N}{\partial v} - 4C_1N\right)z^2 + 2\left(\frac{\partial P}{\partial v} - 2PC_1 + 2A_1Nk^2\right)z + 4A_1Pk^2 = 0,$$

$$-4N\frac{C}{k^2}z^2 + \left[\frac{\partial N}{\partial u} + 4N\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - 4\frac{PC}{k^2}\right]z + 2\frac{\partial P}{\partial u} + 4P\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) = 0,$$

qui, devant être satisfaites par les deux racines de l'équation (17), lui sont identiques.

Nous trouvons ainsi les conditions

$$\frac{\partial \log N}{\partial v} - 4C_1 = \frac{\partial \log P}{\partial v} - 2C_1 + 2A_1\frac{N}{P}k^2 = 4A_1Pk^2,$$

$$-4\frac{C}{k^2} = \frac{N}{P}\,\frac{\dfrac{\partial \log N}{\partial u} + 4\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)}{2} - 2\frac{C}{k^2} = 2P\left[\frac{\partial \log P}{\partial u} + 2\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)\right].$$

Cherchons l'image sphérique du réseau conjugué, supposé tracé sur l'une des surfaces qui correspondent aux racines de l'équation (17); nous avons déjà trouvé, en appliquant les formules (19) du numéro précédent, les

[illegible]

[illegible] les lignes de courbure. On [illegible] par O. Bonnet [1].

[illegible] du numéro précédent, combinés avec ceux du n° 16, con[illegible] conclusions suivantes :

[illegible] surface admet plus d'une déformation conservant les lignes de [illegible]

[1] O. Bonnet, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLII, p. [illegible].

courbure, elle en admet une infinité; ses normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour, et réciproquement; c'est une surface moulure obtenue par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre.

Si une surface admet une seule déformation conservant les lignes de courbure, ses normales forment une congruence cyclique, et réciproquement; c'est une surface ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante qui n'est pas de révolution.

En particulier, les normales d'une surface à courbure totale constante forment une congruence cyclique : le système cyclique correspondant est celui de M. Ribaucour, formé de cercles de rayon constant.

24. *Systèmes cycliques dont les cercles sont situés dans les plans tangents d'une surface* (Σ). — On peut conpléter les résultats du n° 22 en reprenant la démonstration du théorème de M. Darboux [1] qui rattache la théorie des systèmes cycliques à celle de la déformation des surfaces.

Proposons-nous de trouver un système cyclique formé de cercles situés dans les plans tangents d'une surface (Σ), cette surface étant rapportée aux courbes qui correspondent aux développables de la congruence des axes des cercles.

Reportons-nous au n° 15; il suffit de prendre pour (M) la surface (Σ) et d'adjoindre la relation

$$z_m + \rho\theta = 0.$$

Posons

$$\theta = -\cos\sigma,$$
$$z = i\rho\sin\sigma,$$

z sera la cote d'un des foyers du cercle.

Les équations du problème deviennent les suivantes

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2\beta_1(\cos\sigma - 1), \\[2mm] \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = 2\beta(\cos\sigma + 1); \end{cases}$$

---

[1] G. Darboux, *Leçons*, t. III, p. 354.

$$(22)\quad \begin{cases} \xi + \dfrac{\partial x}{\partial u} + q'z - ry = 0, & \xi_1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} + q'_1 z - r_1 y = 0, \\ \eta + \dfrac{\partial y}{\partial u} + rx - p'z = 0, & \eta_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p'_1 z = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} + p'y - q'x = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial v} + p'_1 y - q'_1 x = 0, \end{cases}$$

en posant

$$(23)\quad \begin{cases} p' = -i\dfrac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}p, & q' = -i\dfrac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}q, \\ p'_1 = -i\dfrac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}p_1, & q'_1 = -i\dfrac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}q_1. \end{cases}$$

Supposons que les équations (21) aient une solution commune σ; pour que les équations (22) déterminent un système de valeurs pour x, y, z, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(24)\quad p_1\eta - q_1\xi = p\eta_1 - q\xi_1 = 0.$$

Supposons cette condition remplie; il existe alors un trièdre mobile (T') dont les translations sont les mêmes que celles de (T) et dont les rotations sont p', q', r', p'_1, q'_1, r'_1; l'axe des z de ce trièdre (T') est normal à l'origine à une surface (Σ') applicable sur (Σ); le système (22) admet une triple infinité de solutions constituées par les coordonnées des différents points fixes de l'espace par rapport au trièdre (T').

Nous retrouvons donc le théorème de M. Darboux :

Les systèmes cycliques, formés de cercles situés dans les plans tangents d'une surface (Σ), s'associent par triples infinités, chaque triple infinité se déduisant d'une surface (Σ') applicable sur (Σ).

Remarquons que les relations (24) entraînent les suivantes

$$p'_1\eta - q'_1\xi = 0, \qquad p'\eta_1 - q'\xi_1 = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, due à M. Ribaucour [1] :

Les lignes de courbure des surfaces trajectoires des systèmes cycli-

---

(1) A. Ribaucour, *Sur les systèmes cycliques* (*Comptes rendus de l'Académie des* [illegible]*nces*, 17 et 24 août 1891).

ques, en triple infinité, que le théorème de M. Darboux déduit de la connaissance d'une surface (Σ'), *applicable sur* (Σ), *correspondent à un réseau conjugué de* (Σ) *qui n'est autre que le réseau conjugué commun à* (Σ) *et à* (Σ').

On peut également énoncer les résultats suivants, conséquences des formules établies, et qui montrent que la détermination analytique, au moyen des différentes équations du Tome III des *Leçons* de M. Darboux, des surfaces applicables sur une surface (Σ) équivaut à la recherche de certains réseaux conjugués tracés sur cette surface :

1° Si l'on connaît sur (Σ) un réseau conjugué (u, v) pour lequel les équations (21) ont une solution unique, on en déduit, à l'aide des formules (23), les éléments de forme de la surface (Σ') applicable sur (Σ) et admettant (u, v) comme réseau conjugué.

2° Si l'on connaît sur (Σ) un réseau conjugué (u, v) pour lequel les équations (21) ont une infinité de solutions, on en déduira les éléments de forme d'une infinité de surfaces applicables sur (Σ) et admettant (u, v) pour réseau conjugué; il en sera de même pour toutes les surfaces enveloppes des plans des cercles des systèmes cycliques dérivés d'une même congruence cyclique correspondant à une solution des équations (21).

25. *Quelques applications.* — Les résultats que nous avons établis dans les numéros précédents renferment comme conséquences un certain nombre de propositions relatives à la déformation de surfaces particulières.

1° Considérons les surfaces moulures obtenues par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre; nous avons vu que leurs normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour; d'où résulte cette proposition de Bour [1] :

Étant donnée une surface moulure, il existe une famille de surfaces moulures applicables sur elle; sur toutes ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent.

2° Si deux surfaces minima sont applicables l'une sur l'autre, le réseau conjugué commun est formé des lignes de longueur nulle; or ce réseau

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, t. I, p. 105.

admet, dans le cas actuel, comme représentation sphérique, celle des développables d'une congruence isotrope, c'est-à-dire d'une congruence cyclique et de Ribaucour particulière; nous retrouvons par suite ce résultat qu'*il existe une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée.*

3° Considérons une surface de Voss, c'est-à-dire une surface sur laquelle il existe un réseau conjugué formé de géodésiques; un tel réseau conjugué est caractérisé d'après les formules (1) par les conditions

$$A_1 = 0, \qquad C = 0.$$

Sa représentation sphérique, d'après les formules (19), est donc caractérisée par les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

Elle est identique à celle des développables des congruences du n° 17. Donc :

Étant donnée une surface de Voss, il existe une famille de surfaces de Voss applicables sur elle; sur toutes ces surfaces, les réseaux conjugués formés de géodésiques se correspondent.

4° Une surface à courbure totale constante étant applicable sur une sphère, il en résulte que ses normales forment une congruence cyclique; il en est donc de même pour toute surface à courbure moyenne constante. Considérons une telle surface qui ne soit pas de révolution et appliquons les formules (23); on trouve immédiatement que la surface applicable sur une surface à courbure moyenne constante, avec correspondance des lignes de courbure, est une nouvelle surface à courbure moyenne constante ayant mêmes rayons de courbure principaux; *les surfaces à courbure moyenne constante que le théorème de O. Bonnet* (1) *fait dériver d'une telle surface s'associent donc par couples, se correspondant par leurs lignes de courbure.*

26. *Les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires fixes d'un point d'une surface rapportée à un système conjugué. Démonstra-*

(1) Darboux, *Leçons*, t. III, p. 384.

néaire aux dérivées partielles du second ordre; les caractéristiques de cette équation sont les courbes qui constituent le réseau conjugué commun aux deux surfaces.

Les expressions

$$lX_1 + mX_2, \qquad lY_1 + mY_2, \qquad lZ_1 + mZ_2,$$

où l et m sont des constantes, satisfont aussi à l'équation (24). Donc :

Sur chacune des surfaces obtenues en divisant A_1A_2 *dans un rapport donné, le réseau correspondant au réseau conjugué commun à* (A_1), (A_2) *est également conjugué; ce cas se présentera en particulier pour la surface* (A), *lieu du milieu* A *de* A_1A_2.

Si l'on mène par un point fixe O *de l'espace un segment* Oa *équipollent à* AA_1, *sur la surface* (a), *le réseau correspondant au réseau conjugué commun à* (A_1), (A_2) *est conjugué.*

Le réseau conjugué commun aux deux surfaces (A_1), (A_2) *correspond au réseau conjugué commun à* (A), (a).

Remarquons enfin que du théorème de M. Kœnigs résulte la conséquence suivante :

Si deux surfaces applicables l'une sur l'autre ont plus d'un réseau conjugué commun, elles en ont une infinité; elles sont alors égales ou symétriques.

27. *Congruences dont les développables découpent une surface donnée* (M) *suivant un réseau conjugué donné.* — Utilisons la même remarque qu'au n° 11; nous définirons une droite de la congruence en joignant le point M au point correspondant $P(x_1, y_1, z_1)$ d'une surface, la correspondance étant telle que le plan tangent à (P) en P soit parallèle au plan tangent à (M) en M. On aura

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + py_1 - qx_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1y_1 - q_1x_1 = 0.$$

données d'un point de la droite MP s'expriment par les formules

$$x = \rho x_1, \qquad y = \rho y_1, \qquad z = \rho z_1.$$

Désignons par ρ_1, ρ_2 les valeurs de ρ qui correspondent aux points focaux; si l'on rapporte (M) au réseau conjugué donné, les équations du problème sont, d'après les formules (B), les suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi}{\rho_1}+\frac{\partial x_1}{\partial u}+qz_1-ry_1=0, &\qquad &\frac{\xi_1}{\rho_2}+\frac{\partial x_1}{\partial v}+q_1z_1-r_1y_1=0,\\
&\frac{\eta}{\rho_1}+\frac{\partial y_1}{\partial u}+rx_1-pz_1=0, & &\frac{\eta_1}{\rho_2}+\frac{\partial y_1}{\partial v}+r_1x_1-p_1z_1=0,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0, & &\frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.
\end{aligned}$$

Appliquant les formules (A), les inconnues auxiliaires ρ_1, ρ_2 sont définies par le système

$$\frac{\partial\left(\frac{\xi}{\rho_1}\right)}{\partial v}-\frac{\partial\left(\frac{\xi_1}{\rho_2}\right)}{\partial u}=\frac{\eta}{\rho_1}r_1-\frac{\eta_1}{\rho_2}r,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta}{\rho_1}\right)}{\partial v}-\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\rho_2}\right)}{\partial u}=\frac{\xi_1}{\rho_2}r-\frac{\xi}{\rho_1}r_1.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\rho_1}=\lambda_1,\qquad \frac{1}{\rho_2}=\lambda_2,$$

le système précédent, en vertu des formules (C), se met sous la forme suivante

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+B\,(\lambda_1-\lambda_2)=0,$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-B_1(\lambda_1-\lambda_2)=0.$$

La fonction $\lambda_1-\lambda_2$ est définie, comme il est aisé de le voir, par l'équation adjointe à l'équation (24); c'est un résultat conforme à celui que l'on connaît [1].

28. *Les réseaux conjugués à invariants égaux et le problème de la correspondance par orthogonalité des éléments. Autre problème. Les surfaces isothermiques.* — M. Voss a montré que la détermination des ré-

---

[1] G. Darboux, *Leçons*, t. II, p. 224.

seaux conjugués à invariants égaux tracés sur une surface ([1]) dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Nous allons montrer que ce problème se rattache à la recherche des surfaces correspondant par orthogonalité des éléments à la surface proposée.

Reprenons, en effet, ce dernier problème tel que nous l'avons laissé à la fin du n° 18. Rapportons la surface (M) au réseau conjugué (u, v) qui est la trace des développables de la congruence des droites MP. Il suffit alors de faire $\lambda_2 = -\lambda_1$ au numéro précédent et les équations qui déterminent x_1, y_1, z_1 sont les suivantes

$$\lambda_1\xi + \frac{\partial x_1}{\partial u} + q z_1 - r y_1 = 0, \qquad -\lambda_1\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial v} + q_1 z_1 - r_1 y_1 = 0,$$

$$\lambda_1\eta + \frac{\partial y_1}{\partial u} + r x_1 - p z_1 = 0, \qquad -\lambda_1\eta_1 + \frac{\partial y_1}{\partial v} + r_1 x_1 - p_1 z_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + p y_1 - q x_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

L'inconnue auxiliaire λ_1 est définie par le système

$$\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial u} = -2B_1, \qquad \frac{\partial \log \lambda_1}{\partial v} = -2B,$$

qui la détermine à un facteur constant près, à condition que l'on ait

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Les invariants de l'équation (24) doivent être égaux; autrement dit, le réseau (u, v) est un réseau conjugué à invariants égaux.

Ce réseau conjugué étant supposé connu sur la surface (M), la détermination de x_1, y_1, z_1 s'effectuera, comme on sait, au moyen de quadratures.

Donc :

La recherche des surfaces correspondant par orthogonalité des éléments à une surface (M) *revient à la détermination des réseaux conjugués à invariants égaux tracés sur cette surface; dès qu'on connaît un*

---

[1] A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (*Mathematische Annalen*, t. XXXIX, p. 207 et suivantes).

pareil réseau, on obtient par quadratures toutes les surfaces correspondant à (M) *par orthogonalité des éléments et dont les asymptotiques correspondent aux courbes du réseau conjugué donné.*

On remarquera que nous avons établi la proposition suivante, due à M. Kœnigs :

Toute congruence de Ribaucour découpe, par ses développables, sa surface moyenne suivant un réseau conjugué à invariants égaux.

M. Kœnigs a énoncé une proposition plus générale dont nous considérerons encore le cas particulier suivant :

Supposons au n° 27 que l'on ait

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=2,$$

c'est-à-dire que les points M et P soient conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de la droite MP.

On pourra poser

$$\frac{1}{\rho_1}=1+\lambda, \qquad \frac{1}{\rho_2}=1-\lambda,$$

et si, dans les équations du n° 27, on substitue aux inconnues x_1, y_1, z_1 les inconnues

$$x_1-x_0, \quad y_1-y_0, \quad z_1-z_0,$$

en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T), on retrouve les équations du commencement de ce numéro.

Donc :

Soit une congruence de Ribaucour dont (M) *est la surface moyenne et qui est définie au moyen d'une surface* (P) *que l'on fait correspondre à* (M) *par plans tangents parallèles; si, par un point fixe* O *de l'espace, on mène* OM_1 *équipollent à* MP, *le plan tangent à* (M_1) *en* M_1 *sera parallèle au plan tangent à* (M) *en* M; *la droite* MM_1 *engendrera une congruence, ses points focaux seront conjugués harmoniques par rapport à* M *et* M_1; *les développables de cette congruence intercepteront sur* (M)

seaux conjug
l'intégration d
allons mont
correspond
Reprenon
fin du n° 18
la trace de
de faire λ
x_1, y_1, z_1

L'i

qui

re

n

m

g

DÉTERMINATION

DES

ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT

DANS LESQUELLES

CHAQUE RACINE PEUT S'EXPRIMER EN FONCTION RATIONNELLE DE L'UNE D'ENTRE ELLES (1),

PAR M. IVAR BENDIXSON,

Maître de Conférences à l'Université de Stockholm.

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par Galois. On peut en effet déterminer lesdites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par Abel dans ses deux Mémoires : *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur les équations résolubles algébriquement*.

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de x, nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de x et des quantités $R', \ldots, R^s$ définissant le domaine de rationnalité donné.

Soit

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

(1) Cette Note est le résumé d'un travail publié en suédois dans les *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar;* 1891. N° 3. Stockholm.

une équation irréductible dans le domaine de rationnalité donné, dont les racines peuvent s'écrire

$$\begin{array}{llll} x_1, & \theta x_1 & \ldots, & \theta^{n-1}x_1, \\ \theta_1 x_1, & \theta\theta_1 x_1, & \ldots, & \theta^{n-1}\theta_1 x_1, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \theta_{\mu-1}x_1, & \theta\theta_{\mu-1}x_1, & \ldots, & \theta^{n-1}\theta_{\mu-1}x_1, \end{array}$$

les fonctions θ_ν désignant des fonctions rationnelles de x et θ satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu\theta x_1 = \theta^{\nu+1}x_1, \qquad \theta^n x_1 = x_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1)\ldots(x - \theta^{n-1}x_1).$$

Les coefficients de $f(x)$ peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1)\ldots(t - \theta^{n-1}x_1),$$

t désignant une quantité indéterminée, et cette quantité ψ satisfait à une équation de degré μ à coefficients rationnels

$$(2) \qquad F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)]\ldots[x' - \psi(t, \theta_{\mu-1}x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré μn est donc réduite à une équation de degré μ

$$F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que l'on prouve aisément), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation $F_1 = 0$.

Si l'on savait maintenant que l'une des racines de $F_1 = 0$ pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1, & \lambda x'_1, & \ldots, & \lambda^{n_1-1}x'_1 \\ x'_2, & \lambda x'_2, & \ldots, & \lambda^{n_1-1}x'_2 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ x'_{\mu_1}, & \lambda x'_{\mu_1}, & \ldots, & \lambda^{n_1-1}x'_{\mu_1} \end{array}\right\} \mu_1 n_1 = n,$$

où λ est une fonction rationnelle telle que l'on ait $\lambda^{n_1} x'_1 = x'_1$. On pourrait donc réduire $F_1 = 0$ à une équation de degré μ_1

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré n_1

$$f_1(x') = (x' - x'_1)(x' - \lambda x'_1)\dots(x' - \lambda^{n_1 - 1} x'_1) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de F_2.

Dans ce cas on aura donc une fonction rationnelle θ_1 telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\psi(t, \theta_1 \theta x_1) &= \lambda \psi(t, \theta x_1) \\ &= \psi(t, \theta_1 x_1).\end{aligned}$$

Mais t est une quantité indéterminée, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier α tel que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que cette dernière équation a pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n}[\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1 \theta x_1) + \dots + \psi(t, \theta_1 \theta^{n-1} x_1)],$$

d'où l'on conclut que $\psi(t, \theta_1 x_1)$ est une fonction rationnelle de $\psi(t, x_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre α que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

On voit alors que l'équation (2) peut se réduire à une équation abélienne de degré n_1

$$f_1(x') = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{aligned} x''_1 &= (t_1 - x'_1)(t_1 - \lambda x'_1)\ldots(t_1 - \lambda^{n_1-1} x'_1) \\ &= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)]\ldots[t_1 - \psi(t, \theta_1^{n-1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1), \end{aligned}$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

$$F_2(x'') = 0$$

de degré μ_2 à coefficients rationnels.

On prouve maintenant par des considérations tout analogues aux précédentes que la condition, pour que l'une des racines de F_2 soit une fonction rationnelle d'une autre de ses racines, est qu'il existe des nombres entiers α', β', α'', β'' tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha'} \theta_1^{\beta'} \theta_2 x_1, \\ \theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha''} \theta_1^{\beta''} \theta_2 x_1. \end{aligned}$$

Ces dernières équations constituent en même temps les conditions suffisantes pour que l'une des racines de F_2 soit une fonction rationnelle d'une autre de ces racines.

On parvient de cette manière au théorème que voici :

Étant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle $\theta_\nu x_1$ de l'une d'entre elles x_1, si entre les fonctions $\theta_\nu x_1$ les relations suivantes ont lieu

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_1} \theta_1 x_1, \\ \theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_2} \theta_1^{\beta_2} \theta_2 x_1, \\ \theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_2} \theta_1^{\beta'_2} \theta_2 x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_\nu \theta x_1 &= \theta^{\alpha_\nu} \theta_1^{\beta_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu} \theta_\nu x_1, \\ \theta_\nu \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_\nu} \theta_1^{\beta'_\nu} \ldots \theta_{\nu-1}^{k'_\nu} \theta_\nu x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_\nu \theta_{\nu-1} x_1 &= \theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}} \theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}} \ldots \theta_{\nu-1}^{k_\nu^{\nu-1}} \theta_\nu x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes et elle est par conséquent résoluble par radicaux.

Jusqu'ici nous n'avons employé que les considérations dont s'est servi Abel dans le premier des Mémoires mentionnés, et l'on voit que l'on trouve par ces considérations seules la classe la plus générale d'équations résolubles algébriquement.

Il nous reste à prouver que l'ensemble des équations (3) forme la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit résoluble par radicaux.

Afin d'y parvenir, nous ferons usage des considérations du second Mémoire cité d'Abel.

Nous avons supposé de l'équation (1) qu'elle est résoluble algébriquement. Une de ses racines peut alors s'écrire

$$x_1 = \varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_q),$$

où $R', \ldots, R^s$ désignent les quantités qui définissent le domaine de rationnalité donné et où les quantités V_ν satisfont aux équations suivantes

$$\begin{aligned} &V_1^{p_1} - \varphi_1(R', \ldots, R^s) = 0,\\ &V_2^{p_2} - \varphi_2(R'_1, \ldots, R^s, V_1) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &V_q^{p_q} - \varphi_q(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}) = 0, \end{aligned}$$

les $\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \varphi$ désignant des fonctions rationnelles de $R', \ldots, R^s$ et des fonctions entières rationnelles de $V_1, \ldots, V_q$ de degré $p_1 - 1, \ldots, p_q - 1$. Je suppose ici que l'on ait adjoint au domaine de rationnalité donné les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_q$ qui satisfont à

$$\omega_\nu^{p_\nu - 1} + \omega_\nu^{p_\nu - 2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0,$$

que l'équation

$$V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}) = 0$$

soit irréductible dans le domaine de rationnalité $R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{\nu-1}$, et que les p_ν soient des nombres premiers.

En mettant $\omega_q V_q$ en φ au lieu de V_q, on obtient une nouvelle racine, ce qui nous donne

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q V_q) = \theta\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, V_q),$$

d'où l'on conclut

$$\varphi(R', \ldots, R^s, V_1, \ldots, V_{q-1}, \omega_q^\nu V_q) = \theta^\nu x_1$$

et

$$\theta^{p_q} x_1 = x_1.$$

Formons maintenant

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \ldots, (t - \theta^{p_q - 1} x_1) = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}),$$

et supposons pour plus de simplicité que V_{q-1} soit réellement contenue en H.

En mettant $\omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}$ au lieu de V_{q-1} dans les équations ci-dessus, la fonction V_q se change en $\overline{\mathrm{V}_q}$ et l'on obtient une racine

$$x_2 = \varphi(\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}, \overline{\mathrm{V}_q}).$$

On aura alors

$$\varphi(\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1}, \omega_q^\nu \overline{\mathrm{V}_q}) = \theta^\nu x_2.$$

Comme

$$\psi(t, x_2) = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}\mathrm{V}_{q-1})$$

est différent de $\psi(t, x_1)$, il faut que x_2 soit une racine différente de tous les $\theta^\nu x_1$.

On aura donc

$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant

$$y_\nu = \mathrm{H}(t, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \omega_{q-1}^\nu \mathrm{V}_{q-1}), \qquad \nu = 1, \ldots, p_{q-1},$$

chaque fonction cyclique de $y_1, \ldots, y_{p_{q-1}}$ est indépendante de V_{q-1}.

L'équation

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationnalité $\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}$, ce qui nous permet d'affirmer que

$$(4) \qquad y_2 = \bar{\lambda}(y_1, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-2}),$$

$\bar{\lambda}$ désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation

$$\mathrm{H}(x, \mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}) = 0$$

est évidemment irréductible dans le domaine de rationnalité $\mathrm{R}', \ldots, \mathrm{R}^s, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{q-1}$, ce que l'on prouve aisément en observant que $\mathrm{V}_q^{p_q} - \varphi_q$ est

.IOIRE

.IDÉSIQUES[1],

.I. G. KŒNIGS,

ippléant au Collège de France.

·rme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

ncore écrire

$$ds^2 = [f(x+y) - g(x-y)]\,dx\,dy,$$

·· pour la première fois l'attention de Liouville dans son Mémoire : *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement ·nt s'intégrer.* M. Sophus Lie a montré qu'il y avait lieu, dans certnes recherches, de rapprocher de la forme de Liouville une autre forme, . savoir

$$ds^2 = [f(x)y + g(x)]\,dx\,dy.$$

Supposons que deux surfaces S et S′ soient *représentables géodésiquement* l'une sur l'autre, c'est-à-dire que l'on puisse faire correspondre à un point M de S un point M′ de S′, dans de telles conditions que, lorsque M décrit une géodésique sur S, le point M′ en décrive aussi une sur S′. M. Dini, qui a étudié ce problème, a trouvé que les ds^2 des deux surfaces ont la forme de Liouville ; le ds^2 de S étant

$$(U - V)(du^2 - dv^2),$$

[1] Cet écrit est un résumé du Mémoire qui a remporté, en 1892, le prix Bordin, et dont l'insertion sera faite au *Recueil des Savants étrangers*.

RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE

SUR LES

LIGNES GÉODÉSIQUES[1],

PAR M. G. KŒNIGS,

Professeur suppléant au Collège de France.

1. Les ds^2 de la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

que l'on peut encore écrire

$$ds^2 = [f(x+y) - g(x-y)]\, dx\, dy,$$

ont attiré pour la première fois l'attention de Liouville dans son Mémoire célèbre : *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement peuvent s'intégrer*. M. Sophus Lie a montré qu'il y avait lieu, dans certaines recherches, de rapprocher de la forme de Liouville une autre forme, à savoir

$$ds^2 = [f(x)y + g(x)]\, dx\, dy.$$

Supposons que deux surfaces S et S′ soient *représentables géodésiquement* l'une sur l'autre, c'est-à-dire que l'on puisse faire correspondre à un point M de S un point M′ de S′, dans de telles conditions que, lorsque M décrit une géodésique sur S, le point M′ en décrive aussi une sur S′. M. Dini, qui a étudié ce problème, a trouvé que les ds^2 des deux surfaces ont la forme de Liouville ; le ds^2 de S étant

$$(U - V)(du^2 - dv^2),$$

(1) Cet écrit est un résumé du Mémoire qui a remporté, en 1892, le prix Bordin, et dont l'insertion sera faite au *Recueil des Savants étrangers*.

celui de S′ a la forme

$$\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right);$$

il suit de là que tous les ds^2 compris dans la formule générale ([1])

$$ds^2 = \left(\frac{a'U + b'}{aU + b} - \frac{a'V + b'}{aV + b}\right)\left(\frac{du^2}{aU + b} - \frac{dv^2}{aV + b}\right)$$

conviennent à des surfaces géodésiquement représentables les unes sur les autres, pourvu que a, b, a', b' désignent des quantités constantes.

Mais un cas avait échappé à M. Dini. La démonstration de son théorème repose, en effet, sur ce beau théorème de M. Tissot ([2]), en vertu duquel : *Si l'on établit une correspondance ponctuelle entre deux surfaces* S, S′, *il y a un réseau orthogonal tracé sur* S *et un seul qui admet pour image sur* S′ *un autre réseau orthogonal.*

Ce réseau est celui qui, dans les formules précédentes, est représenté par les équations

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

Or le théorème de M. Tissot peut tomber en défaut dans certains cas.

Si, en effet, la transformation ponctuelle est *conforme,* c'est-à-dire si les lignes de longueur nulle *des deux familles* se correspondent, tout réseau orthogonal tracé sur S a pour image sur S′ un réseau orthogonal. Je dois dire cependant que cette circonstance ne suffirait pas pour infirmer le théorème de M. Dini.

Mais il se peut, et c'est là l'origine du cas omis par M. Dini, il se peut que la transformation ponctuelle soit *demi-conforme,* c'est-à-dire qu'une seule des familles de lignes de longueur nulle tracées sur S ait pour image sur S′ une famille analogue. Alors le théorème de Dini n'est plus vrai et au lieu de la forme de Liouville, c'est la forme de M. Lie qui intervient; les deux ds^2 possèdent la forme de Lie.

2. La forme de Liouville et celle de M. Lie interviennent encore dans

---

([1]) Ces ds^2 forment ce que j'appelle une *famille de Dini.*

([2]) Pour ce qui concerne ce théorème de M. Tissot, et d'autres questions de la théorie des géodésiques que je suppose connues du lecteur, on pourra consulter le Mémoire de M. Lie sur les lignes géodésiques inséré au Tome XX des *Math. Annalen,* et le Tome III des *Leçons* de M. G. Darboux.

un autre problème traité pour la première fois par M. Massieu, le problème des géodésiques qui possèdent une intégrale quadratique par rapport aux vitesses.

Supposons le ds^2 donné sous la forme

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy.$$

L'équation dont Jacobi fait dépendre les géodésiques aura la forme

$$\frac{pq}{\lambda} = 1, \tag{1}$$

où p, q sont les dérivées partielles en x, y de la fonction de Jacobi. Soit l'intégrale quadratique

$$\varphi = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}; \tag{2}$$

il faut que, p, q étant tirés de l'équation (1) et de l'équation (2), l'expression

$$p\, dx + q\, dy$$

soit une différentielle exacte pour toutes les valeurs de la constante φ. La condition d'intégrabilité donnera

$$\begin{aligned}\frac{q}{\lambda}\left(p^2\frac{\partial A}{\partial x} + 2pq\frac{\partial B}{\partial x} + q^2\frac{\partial C}{\partial x}\right) + 2\frac{pq}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}(Ap + Bq)\\ + \frac{p}{\lambda}\left(p^2\frac{\partial A}{\partial y} + 2pq\frac{\partial B}{\partial y} + q^2\frac{\partial C}{\partial y}\right) + 2\frac{pq}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}(Bp + Cq) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation homogène et du troisième degré en p, q doit avoir lieu identiquement.

En égalant à zéro les coefficients de p^3, p^2q, pq^2, q^3, on trouve

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{2}{\lambda}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{2B}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{2C}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{2}{\lambda}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{2A}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{2B}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0.$$

On a d'abord

$$A = X = \text{fonction de } x,$$

$$B = Y = \text{fonction de } y,$$

et il vient ensuite

$$-2\frac{\partial(B\lambda)}{\partial x}=\lambda Y'+2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

$$-2\frac{\partial(B\lambda)}{\partial y}=\lambda X'+2X\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

d'où

$$-2B\lambda=\int\left(\lambda Y'+2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dx+\left(\lambda X'+2X\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)dy.$$

Écrivons que l'expression sous le signe $\int$ est une différentielle exacte et nous trouvons

$$\text{(D)}\qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x}+X''\lambda=2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y}+Y''\lambda.$$

Cette équation, d'après une remarque de M. Darboux (t. II des *Leçons*, p. 209), exprime, lorsque X, Y ne sont pas nuls, que les variables

$$x'=\int\frac{dx}{\sqrt{X}},\qquad y'=\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

font prendre au ds^2 la forme de Liouville.

Si au contraire X (ou Y) est nul, par exemple $X=0$, les variables

$$x'=x,\qquad y'=\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

font prendre au ds^2 la forme de Lie.

Si X, Y étaient nuls en même temps, on aurait

$$A=0,\qquad B=0,\qquad -2B\lambda=\text{const.},$$

et φ ne différerait que par un facteur constant de l'intégrale des forces vives

$$\frac{pq}{\lambda}=1.$$

On voit donc que, λ étant donné, à chaque couple (X, Y) de solutions de l'équation (D) de M. Darboux correspond une intégrale quadratique et même une seule, car ajouter à $-2B\lambda$ une constante, ainsi que le permet la quadrature, revient à ajouter à l'intégrale φ le produit de l'intégrale des
…es par une constante, résultat qu'on pouvait prévoir.

3. M. Darboux a fait la remarque que si (X, Y)(X^0, Y^0) sont deux couples de solutions de (D) il en est de même du couple

$$(aX + bX^0, \quad aY + bY^0),$$

où a, b sont deux constantes arbitraires. Cela résulte de la forme linéaire de l'équation.

Il résulte encore de la forme linéaire des formules qui donnent A, B, C, coefficients de l'intégrale φ, que si φ, φ^0 désignent les intégrales correspondantes aux couples (X, Y), (X^0, Y^0), l'intégrale correspondante au couple ($aX + bX^0$, $aY + bY^0$) sera

$$a\varphi + b\varphi^0.$$

L'intégrale qui correspond à ce nouveau couple ($aX + bX^0$, $aY + bY^0$) n'est donc pas indépendante des deux intégrales φ, φ^0.

Ceci amène naturellement à distinguer entre les couples de solutions de l'équation (D). Les couples de solutions (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ... seront dits *indépendants* si l'on ne peut pas trouver de constantes non nulles K, K^0, K^{00}, ... donnant lieu simultanément aux identités

$$\begin{aligned} KX + K^0X^0 + K^{00}X^{00} + \ldots &= 0, \\ KY + K^0Y^0 + K^{00}Y^{00} + \ldots &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas où, au contraire, une telle identité aurait lieu, un des couples proposés se déduirait linéairement des autres, et l'intégrale quadratique correspondante serait une fonction linéaire des intégrales quadratiques qui se tirent des autres couples.

Si (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ... sont indépendants, les intégrales φ, φ^0, φ^{00}, ... seront aussi linéairement distinctes, car si une expression de la forme

$$K\varphi + K^0\varphi^0 + K^{00}\varphi^{00} + \ldots$$

pouvait se réduire à l'intégrale des forces vives, il faudrait que les coefficients de p^2, q^2 y fussent nuls, c'est-à-dire qu'on devrait avoir

$$\begin{aligned} KX + K^0X^0 + K^{00}X^{00} + \ldots &= 0, \\ KY + K^0Y^0 + K^{00}Y^{00} + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

et les couples de solutions ne seraient pas indépendants.

Ainsi à m couples indépendants de solutions correspondent m intégrales quadratiques indépendantes linéairement.

Le problème que j'ai traité et résolu est le suivant :

Trouver tous les ds^2 qui admettent pour leurs géodésiques plusieurs intégrales quadratiques indépendantes.

Tous les ds^2 d'une même famille de Dini admettent le même problème des géodésiques, c'est-à-dire que les mêmes équations représentent les géodésiques pour tous ces ds^2. On voit donc que si un ds^2 d'une famille de Dini possède exactement m intégrales quadratiques pour ses géodésiques, il en est de même de tous les autres ds^2 de la famille.

4. Des calculs directs, que l'on trouvera développés dans le Mémoire que je résume ici, m'ont permis d'établir les faits suivants.

1° Si un ds^2 admet pour ses géodésiques plus de trois intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives, il en possède exactement cinq et sa courbure est constante.

Il n'y a donc pas de ds^2 dont les géodésiques possèdent exactement quatre intégrales quadratiques.

2° Si un ds^2 admet pour ses géodésiques trois intégrales quadratiques indépendantes exactement, il convient à des surfaces de révolution.

M. Darboux, cherchant les ds^2 de révolution qui, outre l'intégrale linéaire qu'ils possèdent normalement (comme ds^2 de révolution), possèdent *encore* une intégrale quadratique pour leurs géodésiques, a trouvé que ces ds^2 possèdent en réalité *deux intégrales quadratiques* en sus de leur intégrale linéaire. Si l'on joint le carré de cette intégrale linéaire aux deux intégrales quadratiques, on voit que les ds^2 de révolution de M. Darboux possèdent *en fait trois* intégrales quadratiques indépendantes. Nous n'avons donc fait qu'établir la réciproque de ce théorème de M. Darboux; ses ds^2 sont les seuls qui admettent trois intégrales quadratiques exactement.

Ici se placent plusieurs remarques.

Si un ds^2 d'une famille de Dini a sa courbure constante, il en est de même de tous les autres, car ils admettent tous cinq intégrales quadratiques.

Si un ds^2 d'une famille de Dini convient à une surface de révolution, il en est de même de tous les autres. Raison analogue. La première de ces remarques revient à la célèbre proposition de Beltrami, d'après laquelle les surfaces à courbure constante sont représentables géodésiquement les unes sur les autres à l'exclusion de toute autre surface.

Les ds^2 de révolution de M. Darboux prêtent à une remarque analogue. Je prouve, en effet, qu'ils conviennent à des surfaces qui sont *toutes représentables géodésiquement les unes sur les autres.*

En sorte que l'on peut dire que, de même qu'il n'y a qu'*un seul* problème de géodésiques qui admette cinq intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives (les géodésiques des surfaces de courbure constante), il n'y a de même qu'*un seul* problème de géodésiques qui admette exactement trois intégrales quadratiques (les géodésiques des ds^2 de révolution de M. Darboux).

Il est fort remarquable que, dans son beau Mémoire du tome XX des *Mathematische Annalen,* M. Lie soit passé fort près de ce théorème. Il en a démontré toutes les parties, *sauf une,* omission qui ne lui a pas permis d'arriver au théorème général.

5. Je ne terminerai pas les considérations qui concernent ces ds^2 de révolution sans mentionner la détermination nouvelle extrêmement simple de ces ds^2 au moyen des principes précédents.

Si l'on suppose que le ds^2 proposé ait la forme

$$g(x-y)\,dx\,dy,$$

et que (X, Y) soit un couple de solutions de l'équation (D), où l'on fait

$$\lambda = g(x-y),$$

on voit que, le ds ne changeant pas si l'on remplace x, y par $x+h, y+h$, les fonctions

$$\mathrm{X}(x+h), \quad \mathrm{Y}(y+h)$$

constituent encore un couple de solutions de (D). Donc

$$\frac{\mathrm{X}(x+h)-\mathrm{X}(x)}{h}, \qquad \frac{\mathrm{Y}(y+h)-\mathrm{Y}(y)}{h}$$

constituent aussi un tel couple et, par suite, en prenant le cas de h infiniment petit, on reconnaît que $\mathrm{X}'(x)$, $\mathrm{Y}'(y)$ constituent un nouveau couple de solutions.

On en peut conclure que

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \quad (\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), \quad (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}''), \quad \ldots$$

sont autant de couples de solutions de l'équation (D) dans ce cas. On constate aussi que $(1, 1)$ est également un couple de solutions. Mais le ds^2 ne possédant que trois intégrales quadratiques indépendantes, par hypothèse, les couples

$$(1, 1), \quad (X, Y), \quad (X', Y'), \quad (X'', Y'')$$

ne peuvent être indépendants. On a donc deux relations de la forme

$$aX'' + bX' + cX + d = 0,$$
$$aY'' + bY' + cY + d = 0.$$

La discussion de ces équations linéaires à *coefficients constants* est des plus simples et conduit, presque sans calculs, à la détermination complète de toutes les formes de révolution

$$g(x-y)\,dx\,dy$$

qui admettent trois intégrales quadratiques pour leurs géodésiques. Le Tableau I fournit tous les types de révolution ainsi obtenus ([1]).

6. Toutes les difficultés du problème étaient concentrées sur la détermination RIGOUREUSE de tous les ds^2 qui admettent pour leurs géodésiques exactement *deux* intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives. Je dis *rigoureuse*, car un principe simple publié par moi dans les *Comptes rendus* en 1889 permettait de déduire des solutions déjà connues de nouvelles solutions. Que ces solutions fussent les seules solutions du problème, on pouvait le conjecturer, j'oserai même presque dire le souhaiter, tant était considérable la complication des calculs directs; mais conjecturer n'est rien en Géométrie, prouver y est tout.

Si un ds^2 admet pour ses géodésiques UNE SEULE intégrale quadratique en dehors de celles des forces vives, il ne possède pas forcément la forme de Liouville; la forme de Lie peut, en effet, se substituer à cette forme. Mais, si le nombre des intégrales quadratiques est AU MOINS DEUX, *des formes de Liouville sont alors assurées au ds^2*. Il était donc naturel de prendre pour point de départ une de ces formes de Liouville supposée connue.

Je prends en conséquence le ds^2 sous la forme

$$ds^2 = [X_1(x_1) - Y_1(y_1)]\,dx\,dy,$$

([1]) ...ouvera les Tableaux à la fin du présent Mémoire.

où

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

L'équation de M. Darboux acquiert ainsi la forme suivante

$$(\mathrm{D}') \quad (\mathrm{X}''-\mathrm{Y}'')(\mathrm{X}_1-\mathrm{Y}_1)+\frac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'-\mathrm{Y}')\mathrm{X}'_1-\frac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'+\mathrm{Y}')\mathrm{Y}'_1+(\mathrm{X}-\mathrm{Y})(\mathrm{X}''_1-\mathrm{Y}''_1)=0.$$

Cette équation admet normalement le couple de solutions $(1, 1)$ qui fournit précisément l'intégrale quadratique afférente à toute forme de Liouville. L'existence d'une autre intégrale quadratique exige l'existence d'un autre couple (X, Y) de solutions de l'équation (D). Le changement de variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$$

fera passer (1) du type de Liouville à un autre; pour ce motif, j'appelle X, Y des *coefficients de transformation* du ds^2.

Il est clair que si (X, Y), $(\mathrm{X}^0, \mathrm{Y}^0)$, ... sont des couples de coefficients de transformation d'un ds^2, les expressions

$$a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^0 + \ldots, \quad a + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Y}^0 + \ldots$$

constituent un nouveau couple de coefficients de transformation. Si le ds^2 possède m intégrales quadratiques, l'équation (D′) admet, outre le couple $(1, 1)$, $(m-1)$ autres couples formant avec $(1, 1)$ un système de m couples indépendants, et le changement de variables *le plus général* qui amène la forme de Liouville sera défini par les quadratures

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^0 + \ldots}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{a + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Y}^0 + \ldots}}.$$

J'appelle *type essentiel* le type de Liouville le plus général que l'on obtient de la sorte et *variables essentielles* les variables x', y'.

Pour certaines valeurs *particulières* des constantes a, b, c, ... la forme de Liouville que les variables x', y' font prendre au ds^2 peut fort bien avoir un aspect analytique différent du type essentiel. J'appelle *types singuliers* les types de Liouville que l'on obtient ainsi.

---

(1) Cela ne serait plus vrai si l'une des fonctions X, Y était nulle.

Par exemple, dans le Tableau II qui comprend toutes les formes de Liouville à courbure constante non nulle, le premier type est la forme essentielle, les autres ne sont que des formes singulières.

De même dans le Tableau III, qui comprend les formes de Liouville à courbure constante nulle, le premier type est seul essentiel.

Nous avons formé dans le Tableau IV tous les types essentiels des ds^2 de révolution.

Le Tableau V offre au contraire tous les types singuliers correspondants.

7. Ici une remarque s'impose. Si l'on se plaçait, non plus au point de vue du nombre des intégrales quadratiques indépendantes, mais au point de vue du *nombre des formes de Liouville* distinctes qu'un ds^2 peut recevoir, il est clair qu'on se placerait dans une position entièrement fausse.

Voilà, par exemple, les ds^2 de révolution dont IV_1 est le type essentiel, qui ont cinq formes de Liouville bien comptées d'*aspect différent,* tout comme les ds^2 de courbure constante non nulle; la classification défectueuse dont je parle placerait donc à côté l'une de l'autre ces deux espèces de ds^2 qui possèdent des propriétés si diverses et disjoindrait les types de révolution, qui en fait sont si étroitement unis qu'ils ont, comme je l'ai dit, le même problème de géodésiques. La classification la plus rationnelle est celle qui a pour base la considération des intégrales quadratiques.

8. J'arrive actuellement au principe auquel j'ai fait déjà allusion et qui permet de déduire des solutions nouvelles d'une solution connue.

L'équation (D′) est symétrique. Elle exprime tout aussi bien que X, Y est un couple de coefficients de transformation du ds^2

$$(X_1 - Y_1)\, dx\, dy,$$

et que X_1, Y_1 est un couple de coefficients de transformation du ds^2

$$(X - Y)\, dx_1\, dy_1.$$

J'appelle *réciproques* (¹) ces ds^2 qui se correspondent d'une manière si curieuse.

(¹) Cette remarque et toutes ses conséquences ont été publiées par moi en octobre 1889

J'appelle également *réciproques* les surfaces qui admettent deux ds^2 réciproques.

Les surfaces réciproques jouissent d'une propriété remarquable d'après laquelle les géodésiques de l'une ont pour images sur l'autre des coniques géodésiques au sens que M. Dini a attribué à ce nom (*voir* DARBOUX, *Leçons*, t. III).

Si un ds^2 admet des coefficients de transformation (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ..., il possède une infinité de réductions au type de Liouville et, par suite, il existe une infinité de ds^2 de Liouville qui sont réciproques chacun à une forme de Liouville équivalente au ds^2 proposé. L'ensemble de tous ces réciproques est contenu dans une formule unique que le principe de réciprocité suffit à rendre intuitive, c'est la suivante :

$$\left(\frac{a'+b'X+c'X^0+\ldots}{a+bX+cX^0+\ldots}-\frac{a'+b'Y+c'Y^0+\ldots}{a+bY+cY^0+\ldots}\right)\left(\frac{dx^2}{a+bX+cX^0+\ldots}-\frac{dy^2}{a+bY+cY^0+\ldots}\right).$$

Il est naturel d'appliquer cette méthode aux ds^2 à courbure constante nulle ou non nulle. Il suffit pour cela, sans même recourir à la formule que nous venons d'écrire, d'appliquer le principe à tous les éléments des Tableaux II et III. Nous avons ainsi formé le Tableau VI des réciproques des formes à courbure constante nulle et le Tableau VII des réciproques des formes à courbure constante non nulle.

La dernière forme VI_6 du Tableau VI est de révolution, mais les autres n'admettent généralement que deux intégrales quadratiques. Nous disons généralement, parce que, *pour certaines valeurs des constantes*, les formes du Tableau VI, comme aussi celles du Tableau VII, reproduisent des formes des Tableaux précédents, c'est-à-dire des formes de révolution ou à courbure constante. Il y a même lieu d'observer que toutes les formes des Tableaux I, II, III, IV, V sont comprises comme cas particuliers dans les Tableaux VI ou VII.

Mais, tant que les constantes n'ont pas ces valeurs spéciales, les ds^2 des Tableaux VI (sauf VI_6) et VII n'admettent que deux intégrales quadratiques : ce sont donc des solutions nouvelles du problème.

---

aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Depuis, en janvier 1891, j'ai déposé à l'Académie un pli cacheté contenant tous les Tableaux qui accompagnent le travail actuel, *ainsi que la méthode qui me permet d'établir la généralité des résultats*. Par contre, ce qui a trait au problème de M. Lie n'a été l'objet d'aucune Communication antérieure, sauf celle du 26 novembre 1892 à la Société Philomathique.

9. La question qui se pose naturellement à cet instant est la suivante : Quels sont parmi ces nouveaux types ceux qui sont essentiels et quels sont les types singuliers? La réponse est des plus simples.

Tous les types du Tableau VI (on met VI_6 à part) sont singuliers; tous les types du Tableau VII sont essentiels : *ce sont les types essentiels des types du Tableau VI.*

Nous supposons, bien entendu, qu'on établit une concordance entre les constantes des ds^2 du Tableau VI et celles du type essentiel correspondant du Tableau VII.

Par exemple, le type VI_1, qui est singulier et qui s'écrit

$$\left[\frac{a\cos\frac{x-y}{2}+b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}+\frac{a'\cos\frac{x+y}{2}+b'}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy,$$

admet le type essentiel

$$\{L_0[p(\xi+\eta)-p(\xi-\eta)]+\Sigma L_i[p(\xi+\eta+\omega_i)-p(\xi-\eta+\omega_i)]\}\,d\xi\,d\eta,$$

où l'on a

$$L_0=-a-b,\qquad L_1=a-b,\qquad L_2=-a'+b',\qquad L_3=a'+b'.$$

Voici, du reste, quelle est la correspondance entre les types des Tableaux VI et VII.

Le type VII_1 admet le seul type singulier VI_1.

Le type VII_2 admet deux types singuliers VI_2 et VI_4.

Le type VII_3 admet le seul type singulier VI_3.

Le type VII_4 admet le seul type singulier VI_5.

Enfin le type VII_5 n'admet aucun type singulier, fait bien curieux qui est à rapprocher de ce fait tout opposé que le type IV_1 de révolution possède quatre types singuliers.

Je ne mentionnerai qu'en passant les calculs auxquels donne lieu la démonstration de ces divers faits, calculs qui offrent d'élégantes applications des formules de la théorie des fonctions elliptiques.

Si l'on applique aux ds^2 de révolution des Tableaux IV, V le principe de réciprocité, on reproduit ces ds^2 eux-mêmes; cependant, si l'on envisage les types du Tableau I, lesquels se trouvent naturellement reproduits dans le Tableau V, on trouve pour leurs inverses des ds^2 du plan.

Le principe de réciprocité se trouve donc épuisé et l'on ne peut plus rien en attendre. Mais, et c'est là la question précise qui constituait toute la difficulté du problème, cela n'est pas surprenant : *l'emploi du principe de réciprocité nous a tout donné.*

10. Avant de passer à l'indication de la méthode qui me permet d'établir rigoureusement cette proposition, je veux indiquer une application du principe de réciprocité.

Nous ne nous sommes pas préoccupés des ds^2 qui admettent des formes de Lie. Nous avons bien vu que tout ds^2 qui possède plusieurs intégrales quadratiques admet des formes de Liouville, mais rien n'empêche qu'il admette en même temps des formes de Lie. Il faut et il suffit pour cela qu'il admette une forme (F) dont un des couples (X, Y) de coefficients de transformation contienne une fonction nulle, par exemple $Y = 0$. Mais alors la forme (F) sera réciproque à la forme de révolution

$$X\,dx_1\,dy_1.$$

Ici deux cas à distinguer :

Si $X\,dx_1\,dy_1$ a une courbure variable, cette forme est l'une de celles du Tableau I, et nous venons de dire que les formes du Tableau I ont pour réciproques des formes de courbure nulle. Nous obtenons donc d'abord pour (F) toutes les formes à courbure nulle.

Si, au contraire, $X_1\,dx\,dy$ a une courbure constante, la forme réciproque (F) sera l'une de celles des Tableaux VI ou VII.

Il faut donc chercher dans VI, VII les formes (F) qui ont un couple de coefficients de transformation comprenant une fonction nulle. On peut se borner à rechercher les types essentiels, c'est-à-dire qu'on peut se borner à chercher dans le Tableau VII. Nous trouvons ainsi les types VII_2 et VII_3. Si nous avions cherché dans VI, nous n'aurions trouvé que VI_3, type singulier de VII_2.

11. J'arrive actuellement à la démonstration de la proposition qui consiste en ce que les Tableaux précédemment formés contiennent toutes les solutions possibles de ce problème : *Trouver tous les ds^2 dont les géodésiques possèdent plusieurs intégrales quadratiques.*

La question se ramène à cette question d'Analyse : *Trouver toutes les*

solutions de l'équation

$$
(\mathrm{D}') \qquad \left\{ \begin{aligned} &(X_1 - Y_1)(X'' - Y'') + \frac{3}{\sqrt{2}}(X'_1 - Y'_1)X' \\ &\quad - \frac{3}{\sqrt{2}}(X'_1 + Y'_1)Y' + (X - Y)(X''_1 - Y''_1) = 0. \end{aligned} \right.
$$

Abel, dans un Mémoire inséré au tome I de ses *Œuvres*, intitulé : *Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables,* s'est occupé de ce genre d'équations.

Étant donné une équation telle que (D′), il faudra former suivant Abel, par voie de différentiation et d'élimination, une équation différentielle ne contenant plus que l'une des fonctions; il faudra intégrer cette équation (E), transporter son intégrale générale dans (D′) et s'efforcer de déterminer les constantes arbitraires qui y figurent de manière à l'adapter à l'équation (D′). Ainsi, après avoir dû chercher l'intégrale générale de (E), on n'aura, le plus souvent, à utiliser qu'une solution particulière de cette équation. On risque, en conséquence, de compliquer le problème en s'imposant l'intégration de (E). Il se peut qu'on ne puisse trouver l'intégrale générale de (E) et que cependant la proposée (D′) puisse être intégrée. Enfin la méthode d'Abel conduit souvent, et c'est ici le cas, à des calculs compliqués qui la rendent impraticable.

Je me suis donc vu forcé de demander à d'autres principes les moyens de parvenir au résultat. La théorie des fonctions m'a été du plus grand secours. Je développerai ailleurs la théorie générale qui est sortie de mes recherches([1]). Je me renfermerai ici dans les limites du problème qui nous occupe.

12. Je prouve d'abord que les fonctions X, Y, X_1, Y_1 sont des fonctions de leurs arguments respectifs, uniformes dans tout le plan, n'ayant à distance finie d'autres singularités possibles que des pôles.

Je prouve ensuite que tout pôle de l'une quelconque de ces fonctions est forcément double et à résidu nul. C'est-à-dire que, dans le domaine d'un

([1]) Dans la séance du 13 février 1892, j'ai communiqué à la Société Philomathique une proposition générale concernant les équations fonctionnelles, et j'ai fait connaître la grande [illegible] théorie générale des fonctions dans ce genre d'équations. C'est dire que dès [illegible] principes essentiels de ma méthode générale n'étaient un mystère pour per-

pôle a, la fonction X, par exemple, est de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^2} + \text{fonction entière.}$$

Je montre aussi que, si a est un pôle de X, les fonctions X_1, Y_1 vérifient la relation

$$X_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + z\right) = Y_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - z\right),$$

en sorte que

$$Y_1(u) = X_1(a\sqrt{2} - u).$$

Il en résulte aussitôt que, si a, b sont deux pôles de X, $(a-b)\sqrt{2}$ est une période de X_1, Y_1.

Les pôles de Y possèdent des propriétés analogues, et enfin les pôles de X_1, Y_1 fournissent des résultats identiques pour les X, Y.

Signalons en particulier ce fait : si zéro est un pôle de Y, les fonctions $X_1(z)$, $Y_1(z)$ sont égales; donc, dans tous les cas où Y aura un pôle, il suffira de changer y en $y+k$, ce qui est sans importance, pour donner au ds^2 la forme

$$[F(x+y) - F(x-y)]\,dx\,dy.$$

Mais le fait le plus saillant est le suivant :

Si a, b, c sont trois pôles de l'une quelconque des quatre fonctions et si le rapport

$$\frac{b-a}{c-a}$$

n'est pas un nombre réel commensurable, les fonctions X, Y, X_1, Y_1 sont doublement périodiques. Il est alors très aisé de trouver la forme générale que doivent avoir ces quatre fonctions et de reconstituer ainsi les solutions doublement périodiques que l'on voit figurer dans les Tableaux.

13. Restent les autres cas, où pour tout système de pôles d'une des fonctions le rapport $\frac{b-a}{c-a}$ est un nombre commensurable; car, pour ce qui est du cas où X, Y auraient moins de trois pôles, je fais voir que tout coefficient de transformation relatif à une forme essentielle possède sûrement au moins un pôle, à moins d'être constant; que s'il n'en possède qu'un il a la forme

$$\frac{A}{(x+a)^2} + B,$$

et que dans tout autre cas il en possède au moins trois.

Je détermine ensuite la forme générale que peut avoir dans cette hypothèse le coefficient de transformation d'une forme essentielle, et je trouve que, outre le type déjà trouvé, on a seulement le suivant

$$\frac{A \cos \frac{x}{a} + B}{\sin^2 \frac{x}{a}} + C.$$

En résumé, tout coefficient de transformation d'un type essentiel a l'une de ces formes

$$A, \quad \frac{A}{(x-a)^2} + B, \quad \frac{A \cos \frac{x}{a} + B}{\sin^2 \frac{x}{a}} + C.$$

J'observe d'abord que le cas d'un coefficient de transformation constant peut être écarté, car le ds^2 est alors réciproque d'un ds^2 de révolution et nous possédons dans les Tableaux tous les ds^2 de cette sorte. En ce qui concerne les deux autres cas, on peut toujours, en changeant, s'il y a lieu, $x - a$ en x, supposer que σ est un pôle pour X et pour Y; le ds^2 a alors la forme

$$[F(x+y) - F(x-y)]\, dx\, dy,$$

et la fonction F est paire.

Soient, dans ces conditions, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ un couple de coefficients de transformation du ds^2. Eu égard à la parité de la fonction F, le ds^2 ne change pas si l'on échange x et y; donc $\varphi(y)$, $\psi(x)$ constituent encore un couple de coefficients de transformation du ds^2.

On a donc, si l'on écarte les ds^2 qui admettraient plus de deux intégrales quadratiques, car on les a déterminés directement ([1]),

$$\psi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta,$$
$$\varphi(y) = \alpha\psi(y) + \beta,$$

c'est-à-dire

$$\psi(z) = \alpha\varphi(z) + \beta, \qquad \varphi(z) = \alpha\psi(z) + \beta,$$

ce qui exige que

$$\alpha^2 = 1, \qquad (\alpha + 1)\beta = 0.$$

Le cas de $\alpha = -1$ ne donne rien.

---

(1) La méthode s'étendrait aussi aux ds^2 de révolution; mais j'ai cru inutile de revenir sur leur détermination.

de la forme

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Si $G(u)$ a ses racines distinctes, on pourra ramener $G(u)$ à la forme canonique de Weierstrass et obtenir le type VII_1. On aura le type VII_2 si l'équation a deux racines égales; le type VII_3 si $G(u)$ est carré parfait; le type VII_4 si $G(u)$ a un diviseur cubique, et enfin le type VII_5 si $G(u)$ est une puissance quatrième exacte.

J'ajouterai que, en toute hypothèse, si F et G ont un diviseur commun du second degré, le ds^2 convient à une surface de révolution, et à une surface à courbure constante si F et G ont en commun un diviseur cubique.

Ceci posé, il est clair que les ds^2 de la famille de Dini

$$E_k \quad \left[\frac{F(u)}{G(u) + kF(u)} - \frac{F(v)}{G(v) + kF(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u) + kF(u)} - \frac{dv^2}{G(v) + kF(v)}\right]$$

ont tous le même problème de géodésiques que le ds^2 proposé que je représente par E_0, tandis que E_k sera l'élément général de la famille.

Or, si l'on exclut le cas où $G(u)$ et $F(u)$ auraient en commun un facteur carré (cas où le ds^2 serait de révolution), on voit que $G(u) + kF(u)$ aura généralement ses racines inégales, c'est-à-dire que VII_1 sera le type essentiel de E_k. On a donc ce théorème :

Tout ds^2 qui admet deux intégrales quadratiques exactement pour ses géodésiques est représentable géodésiquement sur un autre qui est dans le même cas et qui est réductible au type VII_1.

On voit même que VII_1 est le type essentiel de l'élément général d'une famille de Dini de ds^2 qui admettent exactement deux intégrales quadratiques.

On sent encore là se poursuivre cette extension du théorème de Beltrami que nous avons constatée dans les ds^2 de révolution. Tous les ds^2 qui admettent deux intégrales quadratiques admettent même problème de géodésiques qu'un ds^2 d'un type déterminé VII_1; mais ici ce type contient des constantes qui varient d'un type à l'autre.

15. Pour ce motif j'ai fait du type VII_1 une étude particulière, et je suis le concerne à quelques résultats dignes d'intérêt. Écri-

vons ainsi ce ds^2

$$ds^2 = AS_0 + BS_1 + CS_2 + DS_3,$$

où je fais, pour abréger,

$$S_0 = [p(x+y) - p(x-y)]\,dx\,dy,$$
$$S_i = [p(x+y+\omega_i) - p(x-y+\omega_i)]\,dx\,dy.$$

Les coefficients A, B, C, D sont ce que j'appelle les *invariants* du ds^2. Le ds^2 reste identique à lui-même si l'on fait varier le module des fonctions elliptiques, en conservant les invariants.

Il reste identique à lui-même si l'on permute de toutes les manières les quantités A, B, C, D, en sorte qu'*avec une même fonction* elliptique le ds^2 peut prendre *de vingt-quatre manières* la forme VII_1.

Ainsi les ds^2

$$AS_0 + CS_1 + BS_2 + DS_3,$$
$$DS_0 + AS_1 + DS_2 + CS_3$$

sont autant de formes différentes du même ds^2.

Les relations avec le type singulier sont extrêmement simples.

Le type singulier est, en effet, en conservant à A, B, C, D leur signification précédente,

$$\left[\frac{(B-A)\cos\frac{x-y}{2} + (B+A)}{2\sin^2\frac{x-y}{2}} + \frac{(D-C)\cos\frac{x+y}{2} + (D+C)}{2\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy.$$

Ce qui, avec un léger changement de notation, s'écrit encore

$$\left(-\frac{A}{\sin^2\frac{x-y}{2}} - \frac{B}{\cos^2\frac{x-y}{2}} + \frac{C}{\cos^2\frac{x+y}{2}} + \frac{D}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right)dx\,dy.$$

En permutant A, B, C, D de toutes les manières, le ds^2 reste identique à lui-même, en sorte que *le type singulier VI_1 peut être atteint de vingt-quatre manières* comme toute forme elliptique dans le type VII_1.

On doit donc regarder comme entièrement défini un ds^2 du type VII_1, si l'on connaît ses quatre invariants A, B, C, D, abstraction faite de toute relation d'ordre entre ces quatre invariants, *qui entrent symétriquement dans la conception du ds^2*.

Le ds^2 étant donné sous la forme

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right],$$

les invariants se calculent sans peine ; a, b, c, d étant les racines de $G(u) = 0$, ils ont pour expressions

$$16\frac{F(a)}{G'^2(a)}, \quad 16\frac{F(b)}{G'^2(b)}, \quad 16\frac{F(c)}{G'^2(c)}, \quad 16\frac{F(d)}{G'^2(d)},$$

ce qui permet d'écrire d'emblée les formes VII_1 et VI_1 du ds^2.

Nous avons ainsi le moyen de reconnaître l'identité de deux ds^2 donnés chacun par deux polynômes F, G.

Les invariants interviennent encore dans la forme que M. Darboux a donnée dans ses *Leçons* au type de ds^2 que nous considérons.

Considérons en effet le ds^2

$$4\left[\frac{A}{(x'+y')^2} - \frac{B}{(x'-y')^2} + \frac{C}{(1-x'y')^2} - \frac{D}{(1+x'y')^2}\right]dx'\,dy',$$

la transformation $x' = \operatorname{tang}\frac{x}{2}$, $y' = \operatorname{tang}\frac{y}{2}$ suffira pour le ramener à la forme

$$\left(-\frac{B}{\sin^2\frac{x-y}{2}} - \frac{D}{\cos^2\frac{x-y}{2}} + \frac{A}{\sin^2\frac{x+y}{2}} + \frac{C}{\cos^2\frac{x+y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Le ds^2 ci-dessus est donc réductible au type VII_1 et A, B, C, D sont ses invariants. Mais on voit de plus que, si dans la formule

$$4\left[\frac{A}{(x+y)^2} - \frac{B}{(x-y)^2} + \frac{C}{(1-xy)^2} - \frac{D}{(1+xy)^2}\right]dx\,dy$$

on permute A, B, C, D de toutes les manières possibles, le ds^2 ne changera pas ; on constate aisément que ces permutations reviennent à un groupe de substitutions linéaires effectuées sur les variables x, y.

Interprétées sur le type VII_1, ces substitutions fournissent un exemple des transformations du premier degré dans les fonctions elliptiques.

Nous retrouverons un emploi fort élégant des invariants à propos du problème de M. Lie. Mais, avant de passer à ce problème, je voudrais dire

un mot d'une représentation remarquable sur le plan des lignes géodésiques qui possèdent deux intégrales quadratiques.

16. Les lignes géodésiques du ds^2

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right]$$

ont pour équation finie

$$\int \frac{du}{\sqrt{G(u) + a F(u)}} + \int \frac{dv}{\sqrt{G(v) + a F(v)}} = b,$$

où a, b sont les deux constantes d'intégration. Comme $F(u)$, $G(u)$ sont des polynômes du quatrième degré, on est donc ramené à l'équation d'Euler.

Soit la conique représentée dans un plan quelconque par l'équation

$$Y^2 - 4ZX = 0;$$

on vérifie cette équation en posant

$$X = t^2, \qquad Y = 2t, \qquad Z = 1,$$

où t est un paramètre arbitraire. La tangente au point t de la conique a pour équation

$$X - tY + t^2 Z = 0.$$

Si d'un point X, Y, Z on mène deux tangentes à la conique, les paramètres t, t' des points de contact seront racines de l'équation précédente; on aura donc

$$\frac{Z}{1} = \frac{Y}{t + t'} = \frac{X}{tt'}.$$

On peut dès lors substituer, avec M. Darboux, les coordonnées t, t' aux coordonnées X, Y, Z d'un point. Une équation entre t, t' représente une courbe; en particulier, l'équation la plus générale en t, t' symétrique par rapport à t, t', du second degré en t et de second degré en t', correspond à la conique la plus générale.

Si

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0$$

ds^2 est de révolution, et que sa courbure est constante si les coniques du réseau touchent trois droites fixes.

Cette dernière proposition comprend le théorème de M. Beltrami, car les coniques inscrites dans un triangle $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont pour équation

$$l\sqrt{X} + m\sqrt{Y} + n\sqrt{Z} = 0;$$

il suffit de faire la transformation ponctuelle

$$X' = \sqrt{X}, \qquad Y' = \sqrt{Y}, \qquad Z' = \sqrt{Z}$$

pour transformer ces coniques dans les droites du plan, c'est-à-dire pour obtenir une représentation des géodésiques par les droites du plan.

17. M. Lie, dans un beau travail inséré au Tome XX des *Mathematische Annalen,* a étudié les géodésiques avec transformations infinitésimales. Il a distingué trois cas principaux suivant que la transformation est conforme, demi-conforme ou non conforme. Il a résolu tous les cas possibles de transformations conformes ou demi-conformes, mais en ce qui concerne le cas général, il se borne à former une équation contenue dans celle de M. Darboux. L'éminent géomètre norvégien a toutefois considéré un cas important, mais exceptionnel, dans lequel la transformation infinitésimale conserve un réseau isotherme de coniques géodésiques. Il restait à trouver les autres cas, c'est-à-dire à trouver le cas général. Dans ce cas général, le ds^2 possède, d'après M. Lie lui-même, deux intégrales quadratiques pour ses géodésiques; nous devons donc nous attendre à le trouver parmi les ds^2 du Tableau VII.

Mais ici intervient utilement la remarque déjà faite que tout ds^2 à deux intégrales quadratiques est représentable géodésiquement sur un ds^2 du type VII_1. Nous pouvons, grâce à cette remarque, nous borner à chercher les types réductibles à VII_1 qui possèdent une transformation infinitésimale de leurs géodésiques.

Les invariants du type VII_1 fournissent une réponse dont la simplicité est inespérée.

Il faut et il suffit pour qu'un type VII_1 *possède une transformation infinitésimale de ses géodésiques qu'un des invariants* A, B, C, D *soit nul, par exemple* $D = 0$, *et en outre que les trois autres vérifient une*

relation de la forme

$$\pm\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\pm\sqrt{C}=0.$$

18. Il peut arriver accidentellement que deux des trois invariants restants soient, en outre, égaux, par exemple $B=C$; on ne saurait avoir $A=0$ car le ds^2 serait de révolution; il faut donc que l'on ait dans ce cas

$$\pm\sqrt{A}\pm(\sqrt{B}+\sqrt{C})=0$$

ou

$$\pm\sqrt{A}\pm 2\sqrt{B}=0,$$

c'est-à-dire $A=4B=4C$.

Comme il importe peu de faire $C=1$, on aura $B=C=1$, $A=4$, et l'on obtient le ds^2 remarquable

$$\left[-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}}+\frac{2\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy,$$

qui possède une transformation infinitésimale de ses géodésiques et une seule. Mais ce qui est très digne d'intérêt, c'est que *sur ce ds^2*, qui ne contient aucune constante, *sont géodésiquement représentables tous les ds^2 qui admettent* une *transformation infinitésimale de leurs géodésiques*.

En cela consiste la solution qui manquait à M. Lie.

J'ai complété en divers autres points les résultats de M. Lie. C'est ainsi que les seuls ds^2 de révolution jouissent de la propriété d'admettre trois transformations infinitésimales de leurs géodésiques; une de ces transformations est toujours conforme. Il n'y a donc pas, contrairement à ce qu'avait pu augurer M. Lie, de géodésiques possédant trois transformations infinitésimales non conformes.

J'ajouterai que, dans le cas des géodésiques à transformations infinitésimales, le réseau représentatif des coniques peut se définir comme il suit.

On prendra deux coniques A, B telles qu'on puisse inscrire dans A une infinité de triangles T circonscrits à B; on prendra une tangente D commune à A et à B. Les coniques tangentes à D et inscrites aux triangles T forment le réseau demandé.

On observera que nous avons ainsi, par le fait, résolu cette question :

Trouver les réseaux tangentiels de coniques qui possèdent une transformation infinitésimale ponctuelle.

TABLEAU I.

Formes de révolution à intégrales quadratiques sous leur aspect caractéristique de révolution $g(x \mp y)\,dx\,dy$.

1. $$ds^2 = \frac{a\left(e^{\frac{x-y}{2}} + e^{\frac{y-x}{2}}\right) + b}{\left(e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}}\right)^2}\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (D) $(1, 1)(e^x, e^y)(e^{-x}, e^{-y})$.

2. $$ds^2 = \left(a e^{-\frac{x+y}{2}} + b e^{-(x+y)}\right) dx\,dy,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(0, e^y)(e^x, 0)$.

3. $$ds^2 = \left[\frac{a}{(x-y)^2} + b\right] dx\,dy,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(x, y)(x^2, y^2)$.

4. $$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(x, y)(0, 1)$.

Remarque. — Le premier type peut encore s'écrire

$$ds^2 = \frac{a\cos\dfrac{x'-y'}{2} + b}{\sin^2\dfrac{x'-y'}{2}}\,dx'\,dy',$$

avec les couples de solutions de (D) $(1, 1)(\cos x', \cos y')(\sin x', \sin y')$.

TABLEAU II.

Formes de Liouville à courbure constante non nulle.

1. $$ds^2 = [\wp(x+y) - \wp(x-y)]\, dx\, dy.$$

Expression générale des coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$,

où

$$\Phi(x) = L_0\, \wp(x) + L_1\, \wp(x+\omega_1) + L_2\, \wp(x+\omega_2) + L_3\, \wp(x+\omega_3) + L_4.$$

2. $$ds^2 = \left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\Phi(x)$, $\Phi(y)$.

$$\Phi(x) = \frac{L_0}{\sin^2 x} + \frac{L_1}{\cos^2 x} + L_2 \cos 4x + L_3 \cos 2x + L_4.$$

3. $$ds^2 = \frac{1}{\sin^2(x-y)}\, dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = L_0 \sin 4x + L_1 \sin 2x + L_2 \cos 4x + L_3 \cos 2x + L_4.$$

4. $$ds^2 = \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \frac{L_0}{x^2} + L_1 x^2 + L_2 x^4 + L_3 x^6 + L_4.$$

5. $$ds^2 = \frac{dx\, dy}{(x-y)^2}.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = L_0 x^4 + L_1 x^3 + L_2 x^2 + L_3 x + L_4.$$

Dans ces formules les L sont des constantes arbitraires; $\wp(x)$ est la fonction de M. Weierstrass.

TABLEAU III.

Formes de Liouville à courbure nulle.

1. $$ds^2 = \left(e^{\overline{x+y}} + e^{-\overline{x+y}} + e^{\overline{x-y}} + e^{-\overline{x-y}}\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x + e^{-x})^2}$, $\quad \lambda + \dfrac{\mu'(e^y - e^{-y}) + \nu'}{(e^y + e^{-y})^2}$.

$$ds^2 = (e^{x+y} + e^{x-y})\, dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x + e^{-x})^2}$, $\quad \lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}$.

3. $$ds^2 = e^{x+y}\, dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu e^x + \nu}{e^{2x}}$, $\quad \lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}$.

4. $$ds^2 = \left(\overline{x+y}^2 - \overline{x-y}^2\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2} + \nu$, $\quad \lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'$.

5. $$ds^2 = \left(\overline{x+y} - \overline{x-y}\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu$, $\quad \lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'$.

6. $$ds^2 = dx\,dy,$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu$, $\quad \lambda y^2 + \mu' y + \nu'$.

Dans toutes ces formules, λ, μ, ν, μ', ν' représentent cinq constantes entièrement arbitraires.

Le premier type de ce Tableau, qui est le type essentiel des ds^2 de courbure nulle peut s'écrire encore

$$ds^2 = \left(\cos\overline{x' + y'} - \cos\overline{x' - y'}\right) dx'\,dy',$$

avec les coefficients de transformation

$$\lambda + \frac{\mu \cos x' + \nu}{\sin^2 x'}, \quad \lambda + \frac{\mu' \cos y' + \nu'}{\sin^2 y'}.$$

TABLEAU IV.

Types essentiels de ds^2 de révolution.

1. $$ds^2 = A[p(x+y) - p(x-y)]\,dx\,dy + B[p(x+y+\omega_1) - p(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation

$$[p(x) + p(x+\omega_1),\ p(y) + p(y+\omega_1)],$$
$$[p(x+\omega_2) + p(x+\omega_3),\ p(y+\omega_2) + p(y+\omega_3)].$$

2. $$ds^2 = A(\cos 4\overline{x+y} - \cos 4\overline{x-y})\,dx\,dy + B(\cos 2\overline{x+y} - \cos 2\overline{x-y})\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left(0, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$, $\left(\frac{1}{\sin^2 2x}, 0\right)$.

3. $$ds^2 = A\left[\frac{1}{\sin^2\overline{x+y}} - \frac{1}{\sin^2\overline{x-y}}\right]dx\,dy + B(\cos 2\overline{x+y} - \cos 2\overline{x-y})\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left(\frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin^2 y}\right)$, $\left(\frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{\cos^2 y}\right)$.

4. $$ds^2 = A(\overline{x+y}^4 - \overline{x-y}^4)\,dx\,dy + B(\overline{x+y}^2 - \overline{x-y}^2)\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left(\frac{1}{x^2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{y^2}\right)$.

Dans ces formules, A, B sont deux constantes qui changent d'un ds^2 à l'autre.

TABLEAU V.

Types singuliers des ds^2 de révolution ([1]).

Types équivalents au type essentiel IV_1.

1. $$\frac{a\cos\frac{x-y}{2}+b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\sin x, \sin y)$.

2. $$\left(\frac{a}{\sin^2\frac{x+y}{2}}+\frac{b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\cos 2x, \cos 2y)$,

3. $$\left[a\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{x-y}{2}}\right)+b\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos 2x, \cos 2y)$, $\left(\frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin^2 y}\right)$.

4. $$\left[\frac{a}{(x+y)^2}+\frac{b}{(x-y)^2}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^4, y^4), (x^2, y^2)

Types équivalents au type essentiel IV_2.

5. $$[ae^{-(x+y)}+be^{-2(x+y)}]\,dx\,dy,$$

Coefficients de transformation $(e^{2x}, 0)$, $(0, e^{2y})$.

6. $$\left[a+b\left(\overline{x+y}^{\,2}-\overline{x-y}^{\,-2}\right)\right]dx\,dy,$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $(0, 1)$.

7. $$[a(e^{2(x+y)}-e^{-2(x-y)}+b(e^{4(x+y)}-e^{-4(x-y)})]\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left[\frac{1}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}, 0\right]$ $(0, e^{-4y})$.

([1]) La concordance entre les types du Tableau V et leurs types essentiels du Tableau IV, s'établit par certaines relations qui permettent d'exprimer les constantes a, b en fonction constantes A, B.

Types équivalents au type essentiel IV_3.

8. $$\left[\frac{a}{(x-y)^2} + b\right] dx\, dy,$$

Coefficients de transformation (x, y), (x^2, y^2).

9. $$\left\{a\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] + b\left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right]\right\} dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

10. $$\left[\frac{a}{(e^{x-y} - e^{y-x})^2} + b e^{2(x+y)}\right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (e^{-2x}, e^{-2y}), (e^{-4x}, e^{-4y}).

Type équivalent au type essentiel IV_4.

11. $$(x+y)\, dx\, dy,$$

Coefficients de transformation (x, y), $(0, 1)$.

TABLEAU VI.

Les ds^2 réciproques des ds^2 du plan.

1. $$ds^2 = \left(\frac{\mu\cos\frac{x+y}{2}+\nu}{\sin^2\frac{x+y}{2}} - \frac{\mu'\cos\frac{x-y}{2}+\nu'}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Coefficient de transformation ($\cos x$, $\cos y$).

2. $$ds^2 = \left[\frac{\mu(e^{x-y}+e^{y-x})+\nu}{(e^{x-y}-e^{y-x})^2} + \frac{\mu' e^{x+y}+\nu'}{e^{2(x+y)}}\right]dx\,dy.$$

Coefficient de transformation (e^{2x}, e^{2y}).

3. $$ds^2 = \left(\frac{\mu e^{x+y}+\nu}{e^{2(x+y)}} + \frac{\mu' e^{x-y}+\nu'}{e^{2(x-y)}}\right)dx\,dy.$$

Coefficient de transformation (e^{2x}, o).

4. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x+y)^2} + \frac{\nu}{(x-y)^2} + \rho\right]dx\,dy.$$

Coefficient de transformation (x^2, y^2).

5. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x-y)^2} + \nu(x+y) + \rho\right]dx\,dy.$$

Coefficient de transformation (x, y).

6. $$ds^2 = (\lambda xy + \mu x + \nu y + \rho)\,dx\,dy.$$

Ce dernier ds^2 est de révolution type V_6 si λ n'est pas nul, type V_{11} si λ est nul; c'est un ds^2 à courbure nulle si λ, étant nul, μ ou ν le sont aussi.

TABLEAU VII.

Réciproques des ds^2 de courbure constante non nulle.

1.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[p(x+y) - p(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[p(x+y+\omega_1) - p(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy \\ & + A_2[p(x+y+\omega_2) - p(x-y+\omega_2)]\,dx\,dy \\ & + A_3[p(x+y+\omega_3) - p(x-y+\omega_3)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $[p(2x), p(2y)]$.

2.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & + A_1\left[\frac{1}{\cos^2(x-y)} - \frac{1}{\cos^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & + A_2[\cos 2(x+y) - \cos 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 4(x+y) - \cos 4(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(\frac{1}{\sin^2 2x}, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

3.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[\sin 4(x+y) - \sin 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[\cos 4(x+y) - \cos 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_2[\sin 2(x+y) - \sin 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 2(x+y) - \cos 2(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(0, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

4.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right]dx\,dy \\ & + A_1[(x+y)^2 - (x-y)^2]\,dx\,dy \\ & + A_2[(x+y)^4 - (x-y)^4]\,dx\,dy \\ & + A_3[(x+y)^6 - (x-y)^6]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale et à la Sorbonne.

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES DE COMPLEXES LINÉAIRES.

Correspondance entre les points et les plans d'une droite. Couples inverses. — Corrélations homographiques sur une droite. — Rapport anharmonique et angle de deux corrélations. — Involution de deux corrélations. — Corrélations singulières. — Couple de droites conjuguées commun à deux complexes linéaires. — Système à deux termes. — Congruence linéaire. — Congruence linéaire singulière. — Cas de décomposition. — Invariant d'une congruence. — Rapport anharmonique de deux complexes linéaires. — Complexes linéaires en involution. — Systèmes linéaires de complexes linéaires. — Systèmes complémentaires. — Systèmes à trois termes. — Droites communes à trois complexes. — Demi-quadriques. — Demi-quadriques complémentaires. — Cas de dégénérescence. — Système à quatre termes. — Droites communes à quatre complexes. — Invariants des systèmes de complexes linéaires. — Forme générale de ces invariants.

20. Je ferai précéder l'étude des systèmes linéaires de complexes du premier degré de quelques remarques générales concernant les correspondances qui peuvent exister entre les points d'une droite x et les plans menés par cette droite.

Soit u un paramètre fixant la position d'un point M sur la droite x, de telle sorte qu'à un point M réponde une seule valeur de u et inversement; soit, de même,

t un paramètre correspondant uniformément aux positions d'un plan π mené par x. Par exemple, u est la distance de M à un point fixe de x, t est la tangente de l'angle du plan π avec un plan fixe mené par x.

Une relation entre u et t

$$f(u, t) = 0$$

fait se correspondre, suivant une certaine loi, les points de x et les plans de x. Si f est du degré m en u et du degré μ en t, on peut dire que cette correspondance est de la classe μ et du degré m. Si $m = \mu = 1$, on retrouve les *corrélations* homographiques introduites au n° 15.

Deux correspondances de degrés m et m' et de classes μ et μ' ont, *en général,*

$$\mu m' + \mu' m$$

couples communs, en appelant couple d'une correspondance le système d'un point M et du plan π correspondant.

Par exemple, deux corrélations homographiques ont en commun, en général, deux couples.

C'est ainsi que, s'il s'agit des deux corrélations de Chasles, relatives à une droite commune à deux surfaces réglées, les deux couples sont les deux couples de raccordement des deux surfaces.

21. Considérons sur une droite deux couples (M, π), (M', π'), nous appellerons *couples inverses* des deux premiers ceux que l'on obtient en échangeant les points; ainsi les couples inverses seront

$$(M, \pi'), \quad (M', \pi).$$

22. Considérons sur une droite x deux corrélations homographiques H, H', soient (F, Φ), (F', Φ') leurs couples communs. Si un plan π tourne autour de x, les homologues O et O' de π dans ces deux corrélations se correspondent homographiquement et F, F' sont les points doubles de cette homographie. Le rapport anharmonique

$$(O', O, F, F') = k$$

est constant, d'après une propriété bien connue des homographies.

De même, si un point O se meut sur la droite, ses plans correspondants π et π' décrivent deux faisceaux homographiques dont Φ, Φ' sont les plans doubles; ici encore, le rapport anharmonique

$$(\pi, \pi', \Phi, \Phi') = k_1$$

est constant.

J'ajoute que $k_1 = k$.

En effet, soit π homologue de O dans H, et π' homologue de O dans H', nous aurons

$$(\pi, \pi', \Phi, \Phi') = k_1.$$

Soit O' homologue de π' dans H; le plan π' ayant pour homologue dans H le point O' et dans H' le point O, on a

$$(O, O', F, F') = k.$$

Or, dans les correspondances homographiques, le rapport anharmonique de quatre éléments égale celui des quatre correspondants. Donc, puisque à O, O', F, F' correspondent π, π', Φ, Φ' dans H, on a bien

$$k_1 = k.$$

Ce rapport k pourra être appelé le *rapport anharmonique* des deux corrélations.

Depuis que Laguerre a appris à définir les angles par un rapport anharmonique, on rattache souvent un angle à un rapport anharmonique, en posant

$$V = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log k.$$

Dans le cas de deux plans, par exemple, si k désigne le rapport anharmonique qu'ils forment avec les deux plans isotropes menés par leur droite commune, V se trouve être, d'après Laguerre, précisément l'angle des deux plans.

Pour indiquer une application immédiate de cette notion de l'angle de deux corrélations, supposons qu'il s'agisse des deux corrélations de Chasles de deux surfaces réglées suivant la droite commune x; supposons de plus que, par une transformation homographique, on ait ramené les plans Φ et Φ' des couples de raccordement à être deux plans isotropes. Alors V sera l'angle de deux plans tangents en un même point O aux deux surfaces, et cet angle étant constant, on voit que les surfaces transformées *se couperont sous un angle constant tout du long de leur droite commune.*

23. Un cas particulièrement important de l'angle de deux corrélations homographiques, c'est celui où cet angle est droit, ou, ce qui revient au même, le cas où l'on a

$$k = -1.$$

Nous dirons alors que les deux corrélations sont EN INVOLUTION.

On voit que, dans ce cas, les couples de points O, O' qui correspondent à un

même plan π se correspondent involutivement; de même pour les plans qui correspondent à un même point.

Ici intervient la notion de couples inverses dont j'ai déjà parlé.

Soit (M, π) un couple d'une corrélation homographique H; soit H′ une corrélation homographique en involution avec la première, et (M, π') un couple de H′, dans lequel le point M est commun avec le premier couple. Soit M′ l'homologue de π' dans la corrélation H, en sorte que (M, π), (M', π') seront deux couples de H. Il est clair que (M, π') étant un couple de H′, (M', π) devra en être un autre. En effet, M et M′ correspondent à un même plan π' dans H et H′ respectivement : donc, à cause de la symétrie caractéristique de l'involution, les points M′ et M doivent être homologues d'un même plan dans H et H′ respectivement, et puisque π' est homologue de M′ dans H, il doit l'être de M dans H′. Ainsi les couples (M', π), (M', π'), inverses des couples (M, π), (M', π'), appartiennent à H′.

La démonstration elle-même prouve que réciproquement : Si une corrélation H′ admet les deux couples inverses de deux couples appartenant à une corrélation H, les corrélations homographiques H et H′ sont en involution.

24. Il pourra nous être utile de mettre, sous une forme analytique, les résultats précédents.

L'équation relative à une corrélation homographique aura la forme

$$aut + bu + ct + e = 0.$$

Cette équation dépend de trois paramètres, $a : b : c : e$.

Dans un travail qui date de 1882, j'ai indiqué un mode de représentation des corrélations homographiques au moyen d'un plan dans l'espace, en considérant a, b, c, e comme les coefficients de l'équation d'un tel plan. Je ne rapporterai pas cette représentation qui n'a rien d'essentiel dans cette exposition (¹).

Observons que, si

$$a'ut + b'u + c't + e' = 0$$

est l'équation d'une autre corrélation homographique H′, l'homographie qui relie deux plans homologues d'un même point s'écrit

$$(ac' - ca')tt' + (ae' - b'c)t + (bc' - a'e)t' + (be' - b'e) = 0.$$

La condition d'involution est donc

$$ae' - b'c - bc' + a'e = 0.$$

(¹) Presque en même temps, M. Stephanos publiait, dans les *Mathematische Annalen*, une représentation des homographies binaires qui offre plusieurs traits communs avec celle à laquelle je fais ici allusion.

Si l'on pose, pour un instant,

$$\theta(a, b, c, e) = bc - ae,$$

cette condition s'écrit

$$\frac{\partial\theta}{\partial a}a' + \frac{\partial\theta}{\partial b}b' + \frac{\partial\theta}{\partial c}c' + \frac{\partial\theta}{\partial e}e' = 0.$$

Elle exprime que les éléments (a, b, c, e), (a', b', c', e') sont conjugués par rapport à la forme quadratique $\theta(a, b, c, e)$.

Les corrélations pour lesquelles on a

$$bc - ae = 0$$

seront dites *singulières*.

Les corrélations singulières offrent une particularité fort remarquable. Leur équation s'écrit

$$(at + b)(au + c) = 0;$$

ou encore

$$(t - t_0)(u - u_0) = 0,$$

en posant

$$t_0 = -\frac{b}{a}, \qquad u_0 = -\frac{c}{a}.$$

Dans une corrélation singulière, un même point O correspond à tous les plans et un même plan π à tous les points. Une telle corrélation est donc caractérisée et définie par un couple (O, π), et les couples de la corrélation se divisent en deux classes : les uns s'obtiennent en associant au point O un plan quelconque de la droite, les autres, en associant au plan π un point quelconque de la même droite. Le couple (O, π) fait partie de ces deux classes à la fois : nous l'appelons le *couple singulier* de la corrélation singulière.

25. Que peut bien signifier la condition analytique d'involution lorsque l'une des deux corrélations homographiques est singulière?

On a

$$ae' - b'c - bc' + a'e = 0,$$

et si la corrélation H' est singulière, on peut faire

$$a' = 1, \qquad b' = -t_0, \qquad c' = -u_0, \qquad e' = u_0 t_0,$$

où u_0, t_0 sont les paramètres du couple singulier. La condition d'involution de-

vient

$$au_0 t_0 + bu_0 + ct_0 + e = 0;$$

elle exprime que le couple singulier appartient à H.

Ainsi, nous continuerons à dire qu'une corrélation homographique H est en involution avec une autre H', H' étant singulière, lorsque le couple singulier de H' appartiendra à H.

Pareillement, deux corrélations singulières seront dites *en involution* si leurs couples singuliers ont en commun soit le point, soit le plan.

Considérons toutes les corrélations homographiques qui admettent deux couples donnés (u_0, t_0), (u_1, t_1); leur équation peut recevoir la forme

$$\frac{u - u_0}{u - u_1} = \lambda \frac{t - t_0}{t - t_1}$$

où λ est quelconque. Il vient, en développant,

$$(1 - \lambda)ut - (u_1 - \lambda u_0)t - (t_0 - \lambda t_1)u + t_0 u_1 - \lambda t_1 u_0 = 0.$$

La condition d'involution avec une autre corrélation (a', b', c', e') s'écrira donc

$$e'(1 - \lambda) - c'(\lambda t_1 - t_0) - b'(\lambda u_0 - u_1) + a'(t_0 u_1 - \lambda t_1 u_0) = 0,$$

ou encore

$$(e' + c' t_0 + b' u_1 + a' u_1 t_0) - \lambda(e' + c' t_1 + b' u_0 + a' u_0 t_1) = 0.$$

Considérons alors deux corrélations admettant en commun les couples (u_0, t_0), (u_1, t_1); ces corrélations correspondront à deux valeurs $\lambda = \alpha$, $\lambda = \beta$ de λ, et la condition d'involution de la corrélation (a', b', c', e') avec chacune d'elles donnera

$$(e' + c' t_0 + b' u_1 + a' u_1 t_0) - \alpha(e' + c' t_1 + b' u_0 + a' u_0 t_1) = 0,$$
$$(e' + c' t_0 + b' u_1 + a' u_1 t_0) - \beta(e' + c' t_1 + b' u_0 + a' u_0 t_1) = 0;$$

c'est-à-dire

$$e' + c' t_0 + b' u_1 + a' u_1 t_0 = 0,$$
$$e' + c' t_1 + b' u_0 + a' u_0 t_1 = 0.$$

Ces équations expriment que les couples inverses (u_1, t_0), (u_0, t_1) appartiennent à la corrélation (a', b', c', e'). On a donc ce théorème :

Si deux corrélations H, H₁ *ont en commun deux couples, toute corrélation* H' *en involution avec* H *et* H_1 *contient les couples inverses des deux premiers et, réciproquement, toute corrélation qui contient ces couples inverses est évidemment en involution avec* H *et* H_1 (n° 23).

Ce théorème définit, on le voit, les corrélations qui sont en involution avec deux corrélations données, puisque ces deux corrélations ont généralement en commun deux couples.

26. Un fait domine la théorie des systèmes de complexes linéaires; c'est le suivant :

Deux complexes linéaires ont généralement en commun un couple de droites conjuguées.

On peut donner de ce théorème une démonstration géométrique.

Soient A et B les deux complexes, Δ une droite n'appartenant à aucun d'eux et Δ', Δ'' les conjuguées de Δ dans les deux complexes. Excluons d'abord le cas où Δ', Δ'' seraient dans un même plan. Alors Δ, Δ', Δ'' définissent une quadrique Q, lieu des droites X qui coupent Δ, Δ', Δ''. Les droites X appartiennent aux deux complexes, puisqu'elles coupent les couples de droites conjuguées (Δ, Δ'), (Δ, Δ'') (n° 14). Considérons une génératrice Y de Q du même système que Δ, Δ', Δ''. Nous savons (n° 14) que les conjuguées Y', Y'' de Y dans les deux complexes A et B sont aussi des génératrices de Q du même système que Δ, Δ', Δ''. De plus, le principe de correspondance nous prouve que Y', Y'' se correspondent homographiquement, car Y' et Y'' se correspondent univoquement. D'après cela, cherchons les droites Y tracées sur Q du système Δ, Δ', Δ'', qui ont mêmes conjuguées dans les deux complexes.

Il faudra exprimer que Y', Y'' coïncident; il y a généralement deux positions Y'_1, Y'_2 de coïncidence. Prenons Y'_1, soit Y_1 sa conjuguée dans A. Par hypothèse, Y'_1 est aussi la conjuguée de Y_1 dans B. Donc Y_1, aussi bien que Y'_1, a même conjuguée dans les deux complexes, et, puisqu'il n'y a dans le système de génératrices Δ, Δ', Δ'' que Y'_1, Y'_2 qui jouissent de cette propriété, il faut que Y_1 coïncide avec la seconde droite Y'_2. Les droites Y'_1, Y'_2 sont donc conjuguées l'une de l'autre dans les deux complexes.

Je ne discuterai pas cette démonstration géométrique. La démonstration analytique que je vais donner conduit à une discussion beaucoup plus sûre et nous fournira des formules utiles.

Prenons les deux complexes linéaires

$$A = \Sigma a_i x_i = 0,$$
$$B = \Sigma b_i x_i = 0;$$

les six équations

$$(1) \qquad \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} = \rho z_i + \rho' z'_i$$

expriment, nous le savons d'après le dernier numéro du Chapitre précédent, que

les droites z, z' sont conjuguées dans le complexe A. Désignons par $c_1, \ldots, c_6$, $c'_1, \ldots, c'_6$ les coefficients des deux complexes spéciaux dont z, z' sont les axes : on a, nous l'avons vu,

$$z_i = \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i}, \qquad z'_i = \frac{\partial \Omega(c')}{\partial c'_i},$$

et l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} = \rho \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} - \rho' \frac{\partial \Omega(c')}{\partial c'_i}$$

ou encore

$$\frac{\partial \Omega(a - \rho c - \rho' c')}{\partial (a_i - \rho c_i - \rho' c'_i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Puisque le discriminant de la forme Ω n'est pas nul, ces six équations exigent que l'on ait

$$(2) \qquad a_i - \rho c_i - \rho' c'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Pareillement, six équations telles que

$$(3) \qquad b_i - \sigma c_i - \sigma' c'_i = 0$$

expriment que les droites z, z' sont conjuguées dans le complexe B.

Observons maintenant que $\rho\sigma' - \rho'\sigma$ ne saurait être nul, sans quoi les complexes A, B ne seraient pas distincts d'après les équations (2), (3), car on tire de ces équations

$$\rho b_i - \sigma a_i = (\rho\sigma' - \sigma\rho') c'_i,$$
$$\rho' b_i - \sigma' a_i = -(\rho\sigma' - \sigma\rho') c_i.$$

Puisque $\rho\sigma' - \sigma\rho'$ n'est pas nul, on a, en divisant par ce binôme,

$$(4) \qquad c_i = \alpha a_i + \beta b_i,$$
$$(5) \qquad c'_i = \alpha' a_i + \beta' b_i,$$

équations équivalentes à (2) *et* (3).

Il ne reste donc plus, pour résoudre le problème, qu'à calculer $\alpha : \beta$ et $\alpha' : \beta'$. On y parvient en exprimant la dernière condition qui nous reste à écrire, à savoir que le complexe $C = \Sigma c_i x_i = 0$ est spécial et de même pour $C' = \Sigma c'_i x_i = 0$. On doit écrire

$$\Omega(\alpha a + \beta b) = \Omega(c) = 0,$$
$$\Omega(\alpha' a + \beta' b) = \Omega(c') = 0;$$

ou, en développant,

$$(6) \qquad \Omega(a)\alpha^2 + 2\Omega(a, b)\alpha\beta + \Omega(b)\beta^2 = 0,$$

et même équation pour $\alpha' : \beta'$.

Cette équation nous donnera deux valeurs de $\alpha : \beta$, et, portant une de ces valeurs dans (4) et l'autre dans (5), nous aurons bien deux complexes spéciaux C, C' dont les axes z, z' seront conjugués dans les deux complexes, puisque les équations (4), (5) sont équivalentes aux équations (2), (3), lesquelles expriment précisément que z et z' sont conjugués dans A et B.

Le théorème est donc établi.

L'imaginarité des racines de (6) n'est pas un obstacle; mais la démonstration tombe en défaut si l'équation (6) en $\alpha : \beta$ a ses racines égales, c'est-à-dire si l'expression

$$\Phi(a \mid b) = \Omega(a)\Omega(b) - [\Omega(a, b)]^2 \tag{7}$$

est nulle. Nous reviendrons plus loin sur l'hypothèse où Φ est nul, et qui est exceptionnelle.

27. Tirons tout de suite une conséquence du résultat que l'on vient d'obtenir. Considérons tous les complexes linéaires compris dans l'équation

$$\lambda A + \mu B = \Sigma(\lambda a_i + \mu b_i) x_i = 0$$

où $\lambda : \mu$ est un paramètre arbitraire. Nous dirons de ces complexes qu'ils forment un faisceau ou mieux un *système à deux termes*.

Les droites z, z', qui sont conjuguées à la fois dans A *et* B, *sont conjuguées par rapport à tout complexe du système à deux termes* (A, B).

D'après les dernières lignes du n° 19, il suffira, pour démontrer cette proposition, de prouver qu'on peut trouver, λ, μ étant quelconques, deux quantités τ, τ' telles que

$$\frac{\partial \Omega(\lambda a + \mu b)}{\partial(\lambda a_i + \mu b_i)} = \tau z_i + \tau' z'_i$$

ou encore, ce qui revient au même [*voir* le passage de (1) à (2)],

$$\lambda a_i + \mu b_i = \tau c_i + \tau' c'_i.$$

Il suffit de se reporter aux équations (2), (3) pour reconnaître que l'on satisfait à ces identités en posant

$$\tau = \lambda\rho + \mu\sigma, \qquad \tau' = \lambda\rho' + \mu\sigma'.$$

Ainsi : *Tous les complexes d'un système à deux termes* (A, B) *ont en commun un couple de droites conjuguées.*

Maintenant, parmi les complexes du système (A, B), il y en a deux qui sont

spéciaux, car, si l'on exprime que le complexe $\lambda A + \mu B = 0$ est spécial, on est amené à écrire

$$\Omega(\lambda a + \mu b) = 0,$$

équation qui n'est autre que l'équation (6), où λ remplace α et μ remplace β. On reconnaît en même temps, par ce moyen, que les droites z, z' sont précisément les directrices de ces complexes spéciaux. Ainsi :

Dans tout système (A, B) *à deux termes de complexes linéaires, il y a deux de ces complexes qui sont spéciaux; les directrices de ces complexes spéciaux sont les deux droites qui sont conjuguées l'une de l'autre dans tous les complexes du système.*

28. On appelle *congruence linéaire l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires.*

Il est clair que la congruence commune à deux complexes d'un système à deux termes est composée de droites appartenant à tous les complexes du système. En effet, les équations $A = 0$, $B = 0$ entraîneront celle-ci

$$\lambda A + \mu B = 0.$$

En particulier, les droites de cette congruence appartiennent aux complexes spéciaux, et, par suite :

La congruence commune à deux complexes linéaires A, B *est composée des droites qui coupent à la fois les droites z, z' conjuguées l'une de l'autre dans les deux complexes.*

Pour ce motif, on donne aux droites z, z' le nom de *directrices de la congruence.*

Pour mener la droite de la congruence issue d'un point P, on prendra l'intersection de deux plans menés par P et les deux directrices. Cette droite est unique. Elle est cependant indéterminée si le point P est pris sur l'une des deux directrices.

Pour tracer la droite de la congruence située dans un plan Π, il suffira de joindre les traces des deux directrices sur ce plan. Il n'y a qu'une solution; mais le problème est indéterminé si le plan Π passe par l'une des deux directrices.

En résumé, la congruence linéaire commune à deux complexes du premier ordre est du premier ordre et de la première classe; résultat que l'on pouvait d'ailleurs énoncer *a priori*. De plus, deux complexes linéaires ont en commun une infinité de faisceaux plans que l'on engendre en associant à un plan Π, mené

par une directrice de la congruence commune, le point P où ce plan coupe l'autre directrice.

29. Arrivons maintenant au cas singulier, laissé de côté, où l'expression $\Phi(a \mid b)$ est nulle. Les deux racines de (6) étant égales, les raisonnements précédents tombent en défaut.

Excluons d'abord le cas où tous les complexes linéaires compris dans le système à deux termes $\lambda A + \mu B = 0$ seraient spéciaux, c'est-à-dire excluons le cas où

$$\Omega(\lambda a + \mu b) = \Omega(a)\lambda^2 + 2\Omega(a, b)\lambda\mu + \Omega(b)\mu^2$$

serait nul identiquement, ce qui exigerait

$$\Omega(a) = 0, \qquad \Omega(a, b) = 0, \qquad \Omega(b) = 0.$$

L'équation (6) possède alors une racine double que je désigne par $\alpha : \beta$, et, dans le système à deux termes, il n'y a qu'un seul complexe spécial, à savoir

$$\alpha A + \beta B = 0.$$

Je représente encore par z_i les coordonnées de la directrice de ce complexe; enfin je considère un complexe quelconque

$$\lambda_0 A + \mu_0 B = 0$$

du système à deux termes (A, B).

On a d'abord, par hypothèse,

$$\Omega(\alpha a + \beta b) = 0;$$

formons en outre

$$\Omega(\alpha a + \beta b \mid \lambda_0 a + \mu_0 b);$$

λ_0, μ_0 figurent linéairement dans cette expression; de même α, β; on peut donc écrire

$$\begin{aligned} &\Omega(\alpha a + \beta b \mid \lambda_0 a + \mu_0 b) \\ &\quad = \Omega(\alpha a + \beta b \mid a)\lambda_0 + \Omega(\alpha a + \beta b \mid b)\mu_0 \\ &\quad = \Omega(a \mid a)\alpha\lambda_0 + \Omega(b \mid a)\beta\lambda_0 + \Omega(a \mid b)\alpha\mu_0 + \Omega(b \mid b)\beta\mu_0. \end{aligned}$$

Mais $\Omega(a \mid a) = \Omega(a)$, $\Omega(b \mid a) = \Omega(a \mid b)$, $\Omega(b \mid b) = \Omega(b)$; on peut donc écrire

$$= [\Omega(a)\alpha + \Omega(a \mid b)\beta]\lambda_0 + [\Omega(a \mid b)\alpha + \Omega(b)\beta]\mu_0,$$

c'est-à-dire $= 0$, puisque, $\alpha : \beta$ étant racine double de (6), on a

$$\begin{aligned} \Omega(a)\alpha + \Omega(a \mid b)\beta &= 0, \\ \Omega(a \mid b)\alpha + \Omega(b)\beta &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\Omega(\alpha a + \beta b \mid \lambda_0 a + \mu_0 b) = 0,$$

quels que soient λ_0 et μ_0; cela s'écrit

$$\sum \frac{\partial \Omega(\alpha a + \beta b)}{\partial(\alpha a_i + \beta b_i)} (\lambda_0 a_i + \mu_0 b_i) = 0,$$

ou encore, eu égard à nos notations,

(8) $$\Sigma (\lambda_0 a_i + \mu_0 b_i) z_i = 0.$$

De là ce théorème :

Lorsque $\Phi(a \mid b) = 0$ *ou, plus exactement, lorsque l'équation* (6) *a une racine double et n'est pas une identité, le système* (A, B) *à deux termes contient un complexe spécial unique et la directrice de ce complexe spécial est une droite commune à tous les complexes du système.*

Il est clair que toute droite commune à deux complexes du système appartient à tous les autres complexes du système, comme dans le cas général. La congruence linéaire commune à tous ces complexes est donc composée de droites qui coupent toutes la directrice z du complexe spécial unique qui fait partie du système. Mais cette condition est insuffisante pour définir la congruence.

Il est facile de compléter cette définition. Soient, en effet, Δ une droite de cette congruence, P le point où elle coupe la droite z et Π le plan mené par Δ et par z. Considérons le faisceau plan (P, Π); deux droites de ce faisceau, la droite z et la droite Δ, font partie de l'un quelconque des complexes du système; donc le point P admet le plan Π comme plan polaire dans tous les complexes du système (A, B); le faisceau (P, Π) appartient à tous ces complexes (n° 13). De là résulte aussitôt que *tous les complexes du système* (A, B) *déterminent sur la droite qui leur est commune la même corrélation normale* (n° 15). Ainsi la congruence linéaire admet ici la définition suivante :

Pour qu'une droite Δ fasse partie de la congruence, il faut et il suffit : 1° *qu'elle coupe la droite fixe* (*directrice* z); 2° *que le plan* (z, Δ) *mené par* z *et* Δ *et le point* (z, Δ) *intersection de* z *et de* Δ *soient deux éléments correspondants d'une corrélation homographique donnée, a priori, sur la droite* z.

On peut placer ici une remarque.

Considérons une congruence linéaire générale admettant les deux directrices z, z'; considérons une quadrique Q arbitraire menée par z et z'. La congruence est composée des droites qui coupent la quadrique Q en deux points situés l'un sur z, l'autre sur z'. Que z' vienne à se rapprocher infiniment de z, la congruence ne

sera autre que l'ensemble des droites qui rencontrent la quadrique en deux points infiniment voisins, dont l'un situé sur z, c'est-à-dire l'ensemble des tangentes à la quadrique aux divers points de sa génératrice z. La corrélation qui figure dans la définition de la congruence n'est donc autre que la corrélation de Chasles qui établit la correspondance entre les points de z et les plans tangents en ces points.

Le lecteur reconnaîtra facilement que les congruences singulières que nous venons de définir sont encore du premier ordre et de la première classe.

30. Reste le cas réservé où l'équation (6) est une identité. Les complexes du système (A, B) à deux termes sont tous spéciaux. Cherchons le lieu de leurs directrices.

Soit un de ces complexes

$$\lambda A + \mu B = 0,$$

et y sa directrice, on a

$$y_i = \frac{\partial \Omega(\lambda a + \mu b)}{\partial(\lambda a_i + \mu b_i)};$$

et comme le second membre est linéaire et homogène en λ, μ, on peut écrire

$$y_i = \lambda \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} + \mu \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i}.$$

On reconnaît ainsi que les directrices des complexes du système (A, B) (tous spéciaux) forment un faisceau plan. Énonçons donc ce théorème :

Lorsque tous les complexes d'un système à deux termes sont spéciaux, leurs directrices forment un faisceau plan.

Quelle est la congruence commune à ces complexes? La réponse est facile. Toute droite de la congruence doit couper toutes les droites du faisceau des directrices. Une telle droite doit donc, ou bien être dans le plan du faisceau, ou bien passer au centre du faisceau. En un mot, la congruence se trouve ici décomposée en deux hyperfaisceaux dont l'un est l'ensemble des droites du plan des directrices, et l'autre est la gerbe des droites issues du point de rencontre des directrices.

Voici donc un exemple où la congruence commune à deux complexes se décompose en deux : l'une, formant un système plan, est de l'ordre zéro et de la classe 1; l'autre, formant une gerbe, est du degré 1 et de la classe zéro. La somme des classes et celle de degrés sont égales à $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, c'est-à-dire au produit des degrés des complexes.

Nous aurons à reconnaître plus tard la généralité de ce fait pour des complexes quelconques. Il est intéressant de noter qu'il se présente dès la congruence linéaire.

Notre congruence linéaire dégénérée a ici une infinité de directrices qui forment un faisceau (A, α). Soit x une droite de ce faisceau. Dans le cas d'une congruence singulière, une corrélation sur la directrice x sert à définir la congruence. Il est clair qu'ici cette corrélation est à son tour singulière. Car, soit (O, Π) un couple de cette corrélation, c'est-à-dire tel que toute droite du faisceau (O, Π) appartienne à la congruence, O étant sur x et Π étant un plan de x. Il faudra que O soit en A et Π est alors arbitraire, ou que Π coïncide avec le plan α et O est alors arbitraire.

De cette définition des couples (O, Π) de la corrélation, on peut donc conclure qu'elle est singulière, et que (A, α) est son couple singulier.

31. Nous avons vu que l'expression $\Omega(a)$ est un invariant du complexe $\Sigma a_i x_i = 0$. Pareillement, l'expression

$$\Phi(a \mid b) = \Omega(a)\Omega(b) - [\Omega(a \mid b)]^2$$

est un invariant de la congruence commune aux deux complexes A et B. Cet invariant est de l'espèce de ceux que l'on nomme *combinant*. Si l'on effectue une transformation linéaire des variables x_i, il se reproduit multiplié par la quatrième puissance du déterminant de la substitution, et, en cela, c'est un invariant. Mais, de plus, si l'on remplace les deux équations

$$A = 0, \qquad B = 0$$

par celles-ci

$$\lambda A + \mu B = 0, \qquad \lambda' A + \mu' B = 0,$$

$\Phi(a \mid b)$ se reproduit multiplié par $(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2$. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
&\Phi(\lambda a + \mu b \mid \lambda' a + \mu' b) \\
&\quad = \Omega(\lambda a + \mu b)\Omega(\lambda' a + \mu' b) - [\Omega(\lambda a + \mu b \mid \lambda' a + \mu' b)]^2 \\
&\quad = [\Omega(a)\lambda^2 + 2\Omega(a \mid b)\lambda\mu + \Omega(b)\mu^2][\Omega(a)\lambda'^2 + 2\Omega(a \mid b)\lambda'\mu' + \Omega(b)\mu'^2] \\
&\qquad - [\Omega(a)\lambda\lambda' + \Omega(a \mid b)(\lambda\mu' + \mu\lambda') + \Omega(b)\mu\mu']^2 \\
&\quad = [\Omega(a)\Omega(b) - \Omega(a \mid b)]^2(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2.
\end{aligned}$$

Les propriétés de l'invariant Φ correspondent donc à celles de la congruence linéaire prise en elle-même, indépendamment du choix des coordonnées, comme aussi du choix des deux complexes linéaires A, B, au moyen desquels on les définit : de là le nom de *combinant* donné à cet invariant.

32. Deux complexes linéaires A, B étant donnés, on peut séparer les propriétés de leur ensemble en deux groupes; les unes appartiennent à leur congruence commune et demeurent les mêmes si l'on substitue à A, B deux autres complexes

du système à deux termes (A, B) : à ces propriétés se rattache l'invariant $\Phi(a \mid b)$, dont l'évanouissement exprime que la congruence est singulière.

Mais, à côté de ces propriétés, il en est d'autres qui appartiennent exclusivement aux deux complexes A et B. C'est ainsi que, si l'on se donne deux sphères, leur cercle commun appartient à toutes les sphères du faisceau, tandis que l'angle sous lequel elles se coupent leur appartient en propre.

Ce sont les propriétés de cet ordre que nous allons envisager pour les deux complexes A, B.

Considérons le complexe

$$A + kB = 0;$$

lorsque k varie, ce complexe parcourt tout le système à deux termes (A, B). Soit Δ une droite de la congruence commune aux complexes de ce système et Π un plan mené par Δ, appelons P_k le pôle du plan Π dans le complexe $A + kB = 0$. Lorsque k varie, le point P_k décrit la droite Δ. Je dis que P_k correspond, d'une façon univoque, aux valeurs de k. D'abord, en effet, k étant donné, P_k est parfaitement déterminé; en second lieu, si l'on se donne P_k comme pôle du plan Π dans un complexe $A + kB$ du faisceau, il suffira, pour trouver la valeur de k, d'écrire qu'une droite z menée par P_k dans le plan Π fait partie du complexe, ce qui donnera

$$A(z) + kB(z) = 0,$$

équation en k du premier degré.

On voit que l'on exclut le cas où les complexes du système (A, B) détermineraient la même corrélation normale sur Δ. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, $A(z)$ et $B(z)$ seraient nuls pour toute position du point P_k sur la droite Δ. D'ailleurs la congruence serait alors singulière et Δ serait sa directrice.

Puisque P_k et k se correspondent univoquement, il en résulte, d'après le principe de correspondance, que le rapport anharmonique de quatre valeurs de k est égal à celui des points P_k correspondants. On a donc ce théorème :

Soient quatre complexes du système, obtenus en prenant

$$k = \alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

et Δ une droite de la congruence commune, les pôles dans les quatre complexes d'un plan, mené par Δ, forment un rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des quantités α, β, γ, δ.

Ce rapport anharmonique est donc constant à deux points de vue; d'abord il demeure constant quand le plan tourne autour de Δ, et, en second lieu, quand Δ se déplace dans la congruence.

Le même raisonnement conduit au théorème suivant, qui est le transformé du précédent par polaires réciproques.

Soient quatre complexes du système, obtenus en prenant

$$k = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

et Δ *une droite de la congruence commune; les plans polaires d'un point quelconque, pris sur* Δ, *dans les quatre complexes forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quantités* α, β, γ, δ.

Ces deux théorèmes subsistent si les deux directrices de la congruence viennent se confondre.

Ils conservent même leur raison d'être si tous les complexes du système sont spéciaux; le rapport anharmonique est, dans ce cas, égal à celui des quatre directrices du complexe, lesquelles forment un faisceau plan.

33. Raisonnons maintenant dans l'hypothèse où les deux directrices de la congruence sont distinctes. Deux complexes

$$A + \rho B = 0, \qquad A + \rho' B = 0$$

étant donnés, adjoignons-leur les complexes spéciaux du système

$$A + k B = 0, \qquad A + k' B = 0,$$

en sorte que k, k' seront racines de l'équation

$$\Omega(b)k^2 + 2\Omega(a \mid b)k + \Omega(a) = 0. \tag{8}$$

Soit Δ une droite de la congruence qui coupera, par conséquent, en deux points F, F' les directrices z, z'. Si l'on mène un plan arbitraire Π par Δ, F et F' sont les pôles de ce plan dans les deux complexes *spéciaux* (k) et (k'); ils demeurent fixes lorsque le plan tourne; par contre, les pôles P_ρ, $P_{\rho'}$ de ce plan Π dans les complexes (ρ), (ρ') varient, mais ils forment, avec F, F', un rapport anharmonique

$$(P_\rho, P_{\rho'}, F, F') = (\rho, \rho', k, k')$$

qui est constant. Ils décrivent donc sur Δ une homographie dont F, F' sont les points doubles et dont (ρ, ρ', k, k') est le rapport anharmonique.

On verra de même que si l'on prend un point arbitraire P sur Δ, si Π_ρ, $\Pi_{\rho'}$ sont les plans polaires de P dans les complexes (ρ), (ρ') et Φ, Φ' les plans menés par Δ et z, par Δ et z', ces plans sont les plans polaires de P dans les complexes *spéciaux* (k), (k'); ils sont fixes. Le rapport anharmonique des quatre plans Π_ρ, $\Pi_{\rho'}$,

Φ, Φ' est égal à

$$(\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}, \Phi, \Phi') = (\rho, \rho', k, k');$$

il est constant et a même valeur que le premier.

Lorsque P se déplace sur Δ, les plans Π_ρ, $\Pi_{\rho'}$ varient seuls et décrivent dès lors deux faisceaux homographiques autour de Δ, dont Φ, Φ' sont les plans doubles et (ρ, ρ', k, k') le rapport anharmonique constant.

Ce rapport anharmonique est facile à calculer. Désignons-le par ε; nous aurons

$$\varepsilon = \frac{\rho - k}{\rho' - k} : \frac{\rho - k'}{\rho' - k'} = \frac{(\rho - k)(\rho' - k')}{(\rho' - k)(\rho - k')}$$
$$= \frac{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho') - (k' - k)(\rho' - \rho)}{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho') + (k' - k)(\rho' - \rho)},$$

d'où

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho')}{(k' - k)(\rho' - \rho)},$$

et comme k, k' sont racines de (8), il vient

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\Omega(b)\rho\rho' + \Omega(a \mid b)\overline{\rho + \rho'} + \Omega(a)}{(\rho' - \rho)\sqrt{-\Phi(a \mid b)}}.$$

Faisons, en particulier, $\rho' = \infty$, puis $\rho = 0$, les deux complexes considérés seront alors A et B, et nous aurons

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\Omega(a \mid b)}{\sqrt{-\Phi(a \mid b)}}.$$

Il suffit de se reporter à ce que nous avons dit plus haut au sujet des corrélations homographiques sur une droite pour voir que ce rapport anharmonique constant ε est égal à celui des deux corrélations normales des complexes suivant une quelconque de leurs droites *communes*. L'angle de ces deux corrélations normales sera, ce que nous appellerons aussi avec M. Klein, l'*angle des deux complexes*.

Si l'on pose

$$V = \frac{1}{2i}\log\varepsilon,$$

on trouve aisément

$$\cos V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{\Omega(a \mid b)}{\sqrt{\Omega(a)\Omega(b)}}. \tag{9}$$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister beaucoup, on voit que si $V = \frac{\pi}{2}$ ou $\varepsilon = -1$, les corrélations normales sont en involution et les deux complexes sont dits aussi en *involution* ou orthogonaux.

La condition d'involution de deux complexes A, B est dès lors la suivante

$$\Omega(a \mid b) = 0.$$

34. Examinons quelques cas particuliers.

La notion d'involution, telle que nous venons de la donner, tombe en défaut si l'un des complexes A, B est spécial. Mais nous pouvons continuer à dire que deux complexes sont en involution chaque fois que l'invariant simultané $\Omega(a \mid b)$ sera nul, même si a et b devenaient spéciaux à la fois.

Au surplus, supposons que B soit spécial et soit z sa directrice. L'équation

$$\Omega(a \mid b) = 0$$

s'écrit

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial b_i} a_i = 0;$$

mais, comme

$$z_i = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i},$$

on a, en somme,

$$\Sigma\, a_i z_i = 0.$$

Ainsi *un complexe spécial est en involution avec tous les complexes qui contiennent sa directrice et réciproquement.*

Plus particulièrement encore, si A lui-même devient spécial, on voit, par application de ce théorème, que *deux complexes spéciaux sont en involution sous la condition nécessaire et suffisante que leurs directions se rencontrent.*

On peut présenter à un autre point de vue la notion de complexes en involution.

Soit un complexe

$$\Sigma\, a_i x_i = 0;$$

la condition pour que deux droites y, y' soient conjuguées dans le complexe s'écrit, comme on sait, sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} = \rho y_i + \rho' y'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

où ρ, ρ' sont deux paramètres.

Supposons que la droite y décrive le complexe

$$\Sigma\, b_i y_i = 0,$$

l'équation

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial\,\Omega(a)}{\partial a_i} b_i = \Omega(a \mid b) = \rho \sum b_i y_i + \rho' \sum b_i y'_i$$

donne

$$\Omega(a \mid b) = \rho' \Sigma\, b_i y'_i.$$

Si nous cherchons dès lors la condition pour que la droite y' décrive aussi le complexe B, nous trouvons

$$\Omega(a \mid b) = 0.$$

Mais si y' fait partie d'un complexe B en même temps que y, cela signifie que B est à lui-même son propre polaire réciproque par rapport au complexe A.

On arrive donc au théorème suivant :

Si deux complexes linéaires sont en involution, chacun d'eux est son propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

Si l'un des complexes est spécial, on retrouve la propriété des droites d'un complexe de coïncider avec leur conjuguée par rapport à ce complexe.

35. La considération des complexes en involution joue le rôle le plus important dans la géométrie de la ligne droite. Elle est liée étroitement à la théorie *des systèmes linéaires de complexes du premier degré.*

Nous avons appelé *système à deux termes* l'ensemble des complexes contenus dans l'équation

$$\lambda A + \mu B = 0;$$

pareillement, soient A, B, C trois complexes linéaires non contenus dans un même système à deux termes, nous appellerons *système à trois termes* l'ensemble des complexes représentés par l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Considérons encore quatre complexes linéaires A, B, C, D non contenus dans un même système à trois termes, les complexes linéaires représentés par l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D = 0$$

formeront un ensemble à quatre termes.

Enfin, en prenant cinq complexes linéaires, A, B, C, D, E, non contenus dans un même système à quatre termes, l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E = 0$$

représentera un système à cinq termes.

système à cinq termes ou d'un même système à un nombre de termes moindre que cinq, l'équation de tout complexe linéaire peut recevoir la forme

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = 0.$$

Autrement dit, un système à six termes comprend tous les complexes linéaires possibles. Nous aurons à faire usage, plus loin, de ce théorème, à propos de la transformation des coordonnées. Pour le moment, nous ne nous écarterons pas des systèmes linéaires, qui sont l'objet de notre présente étude.

36. Considérons le système à p termes

$$(11) \qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_p A_p = 0,$$

où

$$A_\mu = a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \ldots + a_{\mu 6} x_6.$$

Soit le complexe $\Sigma u_i x_i = 0$, et exprimons que ce complexe u est en involution avec le complexe (11), nous aurons

$$\Omega(u \mid \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(u \mid a_1)\lambda_1 + \ldots + \Omega(u \mid a_p)\lambda_p = 0.$$

On voit donc que, si l'on écrit

$$(12) \qquad \Omega(u \mid a_1) = 0, \qquad \Omega(u \mid a_2) = 0, \qquad \Omega(u \mid a_p) = 0,$$

le complexe (u) sera tout d'abord en involution avec les complexes (a_1), (a_2), ..., (a_p), et, de plus, COMME CONSÉQUENCE, sera en involution avec tous les complexes du système à p termes (11).

Les équations (12) s'écrivent

$$\sum \frac{\partial\Omega(a_1)}{\partial a_{1i}} u_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial\Omega(a_2)}{\partial a_{2i}} u_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum \frac{\partial\Omega(a_p)}{\partial a_{pi}} u_i = 0.$$

Nous avons là p équations entre les u_i; elles sont toutes distinctes, car, s'il en était autrement, on pourrait trouver des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ non toutes nulles et vérifiant les relations

$$\rho_1 \frac{\partial\Omega(a_1)}{\partial a_{1i}} + \ldots + \rho_p \frac{\partial\Omega(a_p)}{\partial a_{pi}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Ces relations s'écrivent

$$\frac{\partial\Omega(\rho_1 a_1 + \ldots + \rho_p a_p)}{\partial(\rho_1 a_{1i} + \ldots + \rho_p a_{pi})} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

et, comme Ω a son discriminant non nul, cela exigerait que l'on eût

$$\rho_1 a_{1i} + \ldots + \rho_p a_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Il en résulterait donc l'identité

$$\rho_1 A_1 + \ldots + \rho_p A_p = 0,$$

et les complexes $A_1, \ldots, A_p$ feraient partie d'un système à $(p-1)$ termes ou à un nombre moindre de termes. Ce serait contraire à notre hypothèse que le système (11) est un système à p termes.

Les équations (12) sont donc distinctes et permettent, en conséquence, de tirer p des u_i en fonction des $6-p$ autres. Les valeurs générales des u_i qui vérifient les équations (12) auront donc la forme

$$u_i = g_{1,i}\mu_1 + g_{2,i}\mu_2 + \ldots + g_{6-p,i}\mu_{6-p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

et les g sont des coefficients constants tels que, pour aucune valeur des μ autre que zéro, les u_i ne peuvent s'annuler tous à la fois. D'après cela, si l'on pose

$$G_1 = \Sigma g_{1,i} x_i, \qquad G_2 = \Sigma g_{2,i} x_i, \qquad \ldots, \qquad G_{6-p} = \Sigma g_{6-p,i} x_i,$$

les $(6-p)$ complexes G ne peuvent vérifier d'identité telle que

$$\rho_1 G_1 + \rho_2 G_2 + \rho_{6-p} G_{6-p} = 0,$$

ce qui signifie que ces complexes ne font pas partie d'un même système à $6-p-1 = 5-p$ termes ou d'un système à un nombre moindre de termes. L'ensemble des complexes en involution avec tous ceux du système à p termes, lequel ensemble est représenté par l'équation

$$\Sigma u_i x_i = \mu_1 G_1 + \ldots + \mu_{6-p} G_{6-p} = 0,$$

forme donc un système à $6-p$ termes.

De là ce théorème :

Les complexes linéaires qui sont en involution avec tous ceux d'un système à p termes forment eux-mêmes un système à $6-p$ termes.

Nous appellerons, pour abréger, *systèmes complémentaires* ces deux systèmes à p et à $(6-p)$ termes, dont les complexes sont en involution.

Prenons, par exemple, un système à cinq termes. Le système complémentaire ne comporte qu'un seul complexe. On a donc ce théorème :

Les complexes d'un système à cinq termes sont orthogonaux à un complexe linéaire fixe.

37. Soient Σ, Σ_0 deux systèmes complémentaires à p et à $(6-p)$ termes. Supposons que p soit au moins égal à 2; alors, parmi les complexes du système Σ, il y en a de spéciaux, comme on le voit en écrivant

$$\Omega(a_1\lambda_1 + \ldots + a_p\lambda_p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(a_1)\lambda_1^2 + \Omega(a_2)\lambda_2^2 + \ldots + \Omega(a_p)\lambda_p^2 + 2\Omega(a_1 \mid a_2)\lambda_1\lambda_2 + 2\Omega(a_1 \mid a_3)\lambda_1\lambda_3 + \ldots = 0.$$

Or les directrices de ces complexes spéciaux doivent appartenir à chacun des complexes du système complémentaire Σ_0; en effet, ces complexes spéciaux sont en involution avec tous ceux du système complémentaire Σ_0 : donc, d'après un théorème du n° **34**, leurs directrices appartiennent à ces complexes. Réciproquement, toute droite commune à tous les complexes du système Σ_0 est la directrice d'un complexe spécial en involution avec tous les complexes du système Σ_0; ce complexe spécial fait donc partie du système Σ. Énonçons donc ce théorème :

Les directrices des complexes spéciaux contenus dans un système Σ ne sont autres que les droites communes aux complexes du système complémentaire Σ_0.

Ajoutons cette remarque :

Les droites communes aux complexes d'un système Σ coupent toutes les droites qui sont communes aux complexes du système complémentaire Σ_0.

Ces droites sont, en effet, des directrices de complexes spéciaux qui sont en involution.

38. L'introduction de la notion d'involution simplifie beaucoup le problème de la recherche des droites communes à plusieurs complexes linéaires. Nous avons déjà traité le cas de deux complexes; il reste encore le cas de trois et de quatre complexes.

Soient trois complexes A, B, C ne faisant pas partie d'un même système à deux termes, nous nous proposons de chercher leurs droites communes.

Considérons pour cela le système à trois termes

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = 0;$$

le système complémentaire Σ_0 est également un système à trois termes. Cherchons les complexes spéciaux contenus dans le premier système Σ. Nous écrirons

$$\Omega(\lambda a + \mu b + c\nu) = 0,$$

étant donné que

$$A = \Sigma a_i x_i, \qquad B = \Sigma b_i x_i, \qquad C = \Sigma c_i x_i.$$

Nous aurons, en développant,

$$(13)\quad \begin{cases} \Omega(\lambda a + \mu b + \nu c) \\ \quad = \Omega(a)\lambda^2 + \Omega(b)\mu^2 + \Omega(c)\nu^2 + 2\Omega(a\mid b)\lambda\mu + 2\Omega(a\mid c)\lambda\nu + 2\Omega(b\mid c)\mu\nu = 0; \end{cases}$$

je pose

$$(14)\qquad \Psi(a\mid b\mid c) = \begin{vmatrix} \Omega(a) & \Omega(a\mid b) & \Omega(a\mid c) \\ \Omega(b\mid a) & \Omega(b) & \Omega(b\mid c) \\ \Omega(c\mid a) & \Omega(c\mid b) & \Omega(c) \end{vmatrix},$$

en sorte que Ψ est le discriminant de la forme quadratique (13). Ce discriminant est un invariant simultané des complexes A, B, C. Mais il y a plus; c'est aussi un *combinant,* comme la fonction $\Phi(a\mid b)$. Si, en effet, on remplace A, B, C par des combinaisons telles que

$$\begin{aligned} A_1 &= p\,A + q\,B + r\,C, \\ B_1 &= p'A + q'B + r'C, \\ C_1 &= p''A + q''B + r''C, \end{aligned}$$

où le déterminant

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, la fonction Ψ se reproduit multipliée par le carré de ce déterminant. Observons, en passant, que, si l'on remplace A, B, C par des expressions telles que A_1, B_1, C_1, pour lesquelles le déterminant $\Sigma \pm pq'r''$ ne soit pas nul, cela revient à effectuer, dans la forme (13), la transformation linéaire

$$\begin{aligned} \lambda &= p\lambda_1 + p'\mu_1 + p''\nu_1, \\ \mu &= q\lambda_1 + q'\mu_1 + q''\nu_1, \\ \nu &= r\lambda_1 + r'\mu_1 + r''\nu_1 \end{aligned}$$

sur les variables λ, μ, ν. On peut profiter de cette remarque pour réduire la forme (13). Ainsi, si l'invariant Ψ n'est pas nul, la forme (13) est réductible à trois carrés ou, ce qui est la même chose, au type

$$\lambda\mu - \nu^2.$$

Si Ψ est nul, mais non tous ses mineurs, la forme (13) est le produit de deux facteurs et l'on pourra supposer la forme ramenée au type

$$\lambda\mu.$$

Si Ψ est nul, ainsi que tous ses mineurs, la forme est un carré parfait et l'on

pourra supposer que ce carré est

$$\nu^2.$$

Enfin il se peut que la forme (13) soit nulle identiquement.

Nous avons ainsi les quatre cas qui peuvent se présenter dans l'intersection de trois complexes du premier degré. Examinons-les successivement.

39. Dans le premier cas, on devra avoir

$$\Omega(a)=0, \quad \Omega(b)=0, \quad \Omega(a \mid c)=0, \quad \Omega(b \mid c)=0, \quad 2\Omega(a \mid b)=-\Omega(c)=1.$$

Les deux premières équations prouvent que les deux complexes A, B sont spéciaux, et, à cause de $2\Omega(a \mid b)=1$, on voit que leurs directrices ne peuvent se couper, puisque $\Omega(a \mid b)=0$ est la condition de leur rencontre. La troisième et la quatrième équation prouvent que ces directrices font partie du complexe C.

Maintenant on vérifie de la façon la plus générale l'équation

$$\lambda\mu - \nu^2 = 0,$$

en prenant

$$\lambda = t^2, \quad \mu = 1, \quad \nu = t,$$

où t est un paramètre, en sorte que tous les complexes spéciaux du système sont représentés par l'équation

$$\Sigma(a_i t^2 + c_i t + b_i)x_i = 0.$$

Les coordonnées de la directrice z de l'un de ces complexes seront

$$z_i = \frac{\partial\Omega(at^2+ct+b)}{\partial(a_i t^2 + c_i t + b_i)},$$

ou encore

$$z_i = \frac{\partial\Omega(a)}{\partial a_i}t^2 + \frac{\partial\Omega(c)}{\partial c_i}t + \frac{\partial\Omega(b)}{\partial b_i}.$$

Le lieu de ces directrices z est donc une série réglée, et même une série réglée du second ordre, car, si l'on cherche combien de droites de la série coupent la droite fixe y_i, on est conduit à l'équation du second degré en t

$$\begin{aligned} 0 = \omega(y \mid z) &= \sum \frac{\partial\omega}{\partial y_i} z_i \\ &= \left[\sum \frac{\partial\omega}{\partial y_i}\frac{\partial\Omega(a)}{\partial a_i}\right]t^2 + \left[\sum \frac{\partial\omega}{\partial y_i}\frac{\partial\Omega(c)}{\partial c_i}\right]t + \left[\sum \frac{\partial\omega}{\partial y_i}\frac{\partial\Omega(b)}{\partial b_i}\right] = 0. \end{aligned}$$

Une série réglée peut être constituée par les génératrices d'une surface réglée, par celles d'un cône, ou bien enfin par les tangentes d'une courbe plane. Dans ces deux derniers cas, la série réglée est contenue dans un hyperfaisceau.

Or, tel n'est pas ici le cas, car, si cela avait lieu, les directrices des complexes spéciaux A et B devraient se couper comme faisant partie d'un même hyperfaisceau. L'expression $\Omega(a \mid b)$ devrait être nulle, ce qui n'a pas lieu.

Il faut donc conclure que les directrices de nos complexes spéciaux forment une surface réglée, laquelle est du second degré, puisque la série réglée des directrices est du second ordre.

On a donc ce théorème :

Les directrices des complexes spéciaux d'un système à trois termes constituent généralement les génératrices rectilignes d'une famille d'une quadrique.

Nous dirons, pour abréger, qu'elles forment une *demi-quadrique*. Les génératrices du second système de cette quadrique constitueront ce que nous appellerons la *demi-quadrique complémentaire* de la *première*.

Il est maintenant facile d'avoir les droites communes aux trois complexes A, B, C. L'ensemble de ces droites appartient à tous les complexes du système à trois termes

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

et peut être défini en prenant trois complexes quelconques A_1, B_1, C_1 de ce système, pourvu que ces trois complexes ne fassent pas partie d'un même système à deux termes. Or c'est précisément le cas de trois complexes spéciaux A_1, B_1, C_1 du système; en effet, leurs directrices ne se coupent pas, puisque ce sont les génératrices d'une même demi-quadrique. Le système à deux termes

$$\rho A_1 + \sigma B_1 = 0$$

ne comporte donc pas d'autre complexe spécial que A_1 et B_1, et, par suite, A_1, B_1, C_1 ne peuvent faire partie d'un même système à deux termes (il pourrait ne plus en être de même si les directrices de A_1 et B_1 se coupaient).

Les droites communes aux complexes du système à trois termes sont donc définies par la condition de couper trois génératrices quelconques de la demi-quadrique $\mathfrak{Q}$, lieu des directrices des complexes linéaires spéciaux du système. Ces droites constituent donc la quadrique complémentaire $\mathfrak{Q}_0$. Énonçons dès lors ce théorème :

Les droites communes à trois complexes A, B, C *non compris dans un même système à deux termes, et, par suite, les droites communes à tous les complexes du système à trois termes*

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

forment une demi-quadrique $\mathfrak{Q}_0$, complémentaire de la demi-quadrique $\mathfrak{Q}$ lieu des directrices des complexes spéciaux contenus dans le système à trois termes.

On ne manquera pas d'observer que le système Σ_0 à trois termes, complémentaire du système Σ, admet la demi-quadrique $\mathfrak{Q}_0$ comme lieu des directrices de ses complexes spéciaux, et que les droites de la demi-quadrique $\mathfrak{Q}$ sont, au contraire, communes à tous les complexes du système Σ_0. Cela résulte du corollaire qui termine le n° 37.

40. Nos raisonnements supposent que Ψ n'est pas nul ; admettons maintenant que $\Psi = 0$; nous savons que la forme (13) peut être réduite à $\lambda\mu$; cela nous donne

$$\Omega(a) = 0, \quad \Omega(b) = 0, \quad \Omega(c) = 0, \quad \Omega(bc) = 0, \quad \Omega(c \mid a) = 0;$$

mais $\Omega(a \mid b)$ n'est pas nul.

Les complexes A, B, C sont spéciaux, d'après les trois premières équations. Les deux dernières nous prouvent, en outre, que la directrice Δ_C du complexe C coupe les directrices Δ_A, Δ_B des deux autres complexes ; mais celles-ci ne se coupent pas elles-mêmes puisque $\Omega(a \mid b)$ n'est pas nul.

Soit F le point de rencontre de Δ_C et de Δ_A, F' celui de Δ_C et de Δ_B ; Φ le plan de Δ_C et de Δ_A ; Φ' celui de Δ_C et de Δ_B.

Les complexes spéciaux du système à trois termes, eu égard à l'équation

$$\lambda\mu = 0,$$

se décomposent en deux familles, savoir

$$\mu B + \nu C = 0 \quad \text{et} \quad \lambda A + \nu C = 0.$$

Chacune de ces familles constitue un système à deux termes, et, d'après ce que nous savons, sur ces systèmes, puisque les complexes qui les composent sont tous spéciaux, leurs directrices forment un faisceau plan.

La famille

$$\lambda A + \nu C = 0$$

est donc composée de complexes spéciaux dont les directrices engendrent le faisceau plan (F, Φ), tandis que le faisceau (F', Φ') correspond à la seconde famille.

On observera que les deux faisceaux plans (F, Φ), (F', Φ') ont une droite commune Δ_C, directrice du complexe C.

Il est maintenant facile d'avoir les droites communes aux complexes du système à trois termes. Une quelconque de ces droites est définie par la condition de couper toutes les droites des faisceaux (F, Φ), (F', Φ'). Si elle ne passe pas

par F, elle est donc dans le plan Φ, et si elle ne passe pas par F′, elle est dans le plan Φ'. Ces droites sont donc celles des deux faisceaux plans (F, Φ'), (F', Φ). On voit que les couples (F, Φ'), (F', Φ) sont les inverses (n° **21**) des couples (F, Φ), (F', Φ').

Les droites des faisceaux (F, Φ), (F', Φ') constituent ainsi une dégénérescence des droites d'une demi-quadrique, tandis que les faisceaux inverses (F, Φ'), (F', Φ) constituent la demi-quadrique complémentaire dégénérée.

Il est fort digne de remarque qu'une nouvelle conception des quadriques conduit, pour ces êtres géométriques, à un mode de dégénérescence qu'on ne rencontre pas lorsqu'on les définit soit par leurs points, soit par leurs plans tangents. On sait, du reste, que ces deux dernières définitions conduisent chacune à des dégénérescences propres : cônes ou plans pour les quadriques ponctuelles ; coniques ou points pour les quadriques tangentielles.

Une quadrique ponctuelle ne peut pas devenir une conique ou un point, pas plus qu'une quadrique tangentielle ne peut devenir un cône ou un plan. Au nouveau point de vue où nous nous plaçons, la quadrique peut dégénérer en quatre faisceaux plans inverses (F, Φ), (F', Φ'), (F', Φ), (F, Φ'), les deux premiers représentant les génératrices d'un système et les deux autres celles de l'autre.

41. Admettons maintenant que l'invariant Ψ soit nul ainsi que ses mineurs du premier ordre. Alors la forme est un carré parfait qu'on peut supposer être ν^2. Il vient, dans ce cas,

$$\Omega(a) = 0, \quad \Omega(b) = 0, \quad \Omega(a \mid b) = 0, \quad \Omega(a \mid c) = 0, \quad \Omega(b \mid c) = 0,$$

mais $\Omega(c)$ n'est pas nul.

Les complexes A, B sont spéciaux et, à cause de $\Omega(a \mid b) = 0$, leurs directrices se coupent. Soient F le point et Φ le plan commun. Puisque $\Omega(a \mid c) = 0, \Omega(b \mid c) = 0$, les droites directrices de A et de B appartiennent au complexe non spécial C, et, par suite, F est le pôle du plan Φ dans ce complexe. On en déduit aussitôt que les droites communes aux complexes A, B, C ne sont autres que celles du faisceau plan (F, Φ). Comme, du reste, les complexes spéciaux du système forment le système à deux termes

$$\lambda A + \mu B = 0,$$

il est clair que les directrices de ces complexes spéciaux sont également les droites du faisceau plan (F, Φ).

Si l'on envisage le système complémentaire Σ_0 du système Σ considéré

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C,$$

on voit que les complexes du système Σ_0 ont en commun les droites du faisceau

(F, Φ), comme ceux du système Σ, et les complexes spéciaux sont représentés encore par

$$\lambda A + \mu B = 0.$$

Ce cas n'est autre que le précédent, mais dans lequel les faisceaux (F, Φ), (F', Φ') coïncident.

42. Il reste enfin, pour épuiser les systèmes à trois termes, à traiter le cas où la forme (13) est identiquement nulle. Tous les complexes du système

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

sont spéciaux. Soit z la directrice de l'un de ces complexes, on a

$$z_i = \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} \lambda + \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i} \mu + \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} \nu,$$

et, par suite, ces directrices forment un hyperfaisceau.

Le système Σ est donc composé de complexes spéciaux dont les directrices forment un hyperfaisceau. Les droites mêmes de cet hyperfaisceau sont, dès lors, les seules qui soient communes à tous les complexes du système.

Ce cas offre ceci de remarquable que le système Σ coïncide avec son complémentaire. Le lecteur prouvera facilement que c'est le seul cas où ce fait se présente.

Il est assurément fort remarquable que les complexes linéaires d'un tel système à trois termes puissent avoir, en commun, une congruence de droites (de classe 1 et de degré zéro, ou de classe zéro et de degré 1), sans que pourtant il existe entre trois quelconques de ces complexes une relation linéaire. Ce fait montre avec quelle circonspection doivent être traitées ces questions, et explique le soin peut-être un peu minutieux que nous avons cru devoir apporter dans cette partie de notre exposition.

43. Arrivons maintenant aux droites communes à quatre complexes linéaires, et aux systèmes à quatre termes. Soit Σ un tel système, représenté par l'équation

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C + \rho D = 0.$$

Le système Σ_0 complémentaire étant à deux termes, nous pouvons utiliser ce que nous savons des systèmes à deux termes et des systèmes complémentaires. Le système à deux termes contient deux complexes spéciaux qui peuvent coïncider dans certains cas : il peut aussi se composer de complexes spéciaux dont les directrices forment un faisceau plan. Voyons ce que sont les systèmes complémentaires à quatre termes correspondants.

D'abord, dans le cas général, nous voyons que les complexes du système Σ à quatre termes auront deux droites communes Δ, Δ', directrices de la congruence linéaire commune aux complexes du système à deux termes. Donc :

Quatre complexes linéaires, non compris dans un même système à trois termes, ont, en général, deux droites communes Δ, Δ'.

La congruence dont Δ, Δ' sont les directrices est le lieu des directrices des complexes spéciaux du système.

Accidentellement, Δ et Δ' peuvent coïncider : la congruence des directrices des complexes spéciaux est alors singulière.

Enfin, il y a le cas où tous les complexes du système à deux termes complémentaires Σ_0 sont spéciaux. Soit (F, Φ) le faisceau plan formé par les directrices de ces complexes spéciaux. Les complexes du système à quatre termes ont alors (d'après un théorème établi n° 37) toutes les droites du faisceau (F, Φ) en commun, et pas d'autres.

Les complexes de ce système à quatre termes sont alors définis par la propriété d'admettre un faisceau plan de droites donné (F, Φ).

Comme dans les cas précédents, on pourrait introduire la forme en λ, μ, ν, ρ,

$$\Omega(a\lambda + b\mu + c\nu + d\rho) = 0,$$

et son discriminant

$$\begin{vmatrix} \Omega(a) & \Omega(a \mid b) & \Omega(a \mid c) & \Omega(a \mid d) \\ \Omega(b \mid a) & \Omega(b) & \Omega(b \mid c) & \Omega(b \mid d) \\ \Omega(c \mid a) & \Omega(c \mid b) & \Omega(c) & \Omega(c \mid d) \\ \Omega(d \mid a) & \Omega(d \mid b) & \Omega(d \mid c) & \Omega(d) \end{vmatrix},$$

lequel est un combinant. Si ce discriminant n'est pas nul, on est dans le cas général. S'il est nul, les droites Δ, Δ' coïncident.

Si ses mineurs du premier ordre sont nuls, tous ensemble, on est dans le cas où les complexes ont en commun un faisceau plan de droites.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ces résultats, si analogues à ceux que nous avons déjà rencontrés pour les systèmes à trois termes. On verra que la forme en λ, μ, ν, ρ ne peut être nulle identiquement, ni même être un carré parfait.

44. Nous compléterons cette étude des systèmes linéaires de complexes par une remarque concernant les systèmes à cinq termes.

Soit A, B, C, D, E cinq complexes non contenus dans un même système à

quatre termes. Si l'on résout les cinq équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

les valeurs de $x_1, \ldots, x_6$ correspondantes ne vérifieront pas, en général, l'équation

$$\omega(x) = 0,$$

en un mot, cinq complexes linéaires n'ont pas, en général, de droite commune.

Le système complémentaire se réduit à un complexe linéaire unique, comme nous l'avons fait remarquer au nº 37, et, d'après les résultats obtenus au même endroit, puisque les droites communes aux complexes d'un système sont les directrices des complexes spéciaux du système conjugué, cinq complexes linéaires non compris dans un même système à quatre termes ne peuvent avoir qu'une seule droite commune, à savoir la directrice du complexe complémentaire, lequel *encore devra être spécial*.

Réciproquement, les complexes linéaires qui contiennent une droite donnée z forment un système à cinq termes, à savoir le système complémentaire du système à un terme constitué par le complexe linéaire dont z est la directrice.

45. Au cours de cette exposition, nous avons introduit successivement les invariants $\Omega(a)$, $\Phi(a \mid b)$, $\Psi(a \mid b \mid c)$, et nous en avons indiqué un autre relatif aux systèmes à quatre termes; le système à cinq termes a aussi un invariant. On peut représenter ces combinants d'une façon uniforme comme il suit. Soit

$$\omega(x) = \Sigma\, \omega_{ik} x_i x_k$$

la forme fondamentale, on a, à un facteur constant près, cette expression de $\Omega(a)$

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{16} & a_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{26} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{61} & \omega_{62} & \ldots & \omega_{66} & a_6 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_6 & 0 \end{vmatrix}.$$

On aura de même pour $\Phi(a \mid b)$

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{16} & a_1 & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{61} & \ldots & \omega_{66} & a_6 & b_6 \\ a_1 & \ldots & a_6 & 0 & 0 \\ b_1 & \ldots & b_6 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et pour $\Psi(a \mid b \mid c)$,

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots & a_{16} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{61} & \ldots & \omega_{66} & a_6 & b_6 & c_6 \\ a_1 & \ldots & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \ldots & b_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \ldots & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'invariant d'un système à quatre termes s'obtiendra en bordant, à droite et en bas, avec une ligne de plus $d_1 \ldots d_6\, 0\,0\,0\,0$; en ajoutant encore une autre bordure à droite et en bas $e_1 \ldots e_6\, 0\,0\,0\,0\,0$, on aura l'invariant du système à cinq termes. Cet invariant s'annule si les complexes du système ont une droite commune, c'est-à-dire si le complexe complémentaire est spécial.

46. Faisons enfin remarquer, en terminant ce Chapitre, qu'il résulte de la discussion précédente que tout complexe P qui contient les droites communes à p autres A, B, ..., D, *non contenus* dans un même système à $(p-1)$ termes ou à un nombre de termes moindre que $(p-1)$, fait partie du système à p termes

$$P = \lambda A + \mu B + \ldots + \rho D = 0.$$

Le lecteur vérifiera facilement cette remarque que je me contente ici d'énoncer.

CHAPITRE IV.

PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE EN COORDONNÉES DE DROITES.

Surfaces gauches. — Corrélation de Chasles. — Quadriques de raccordement et congruence des tangentes. — Hyperboloïde osculateur. — Contact d'une surface gauche avec un complexe linéaire. — Contact des divers ordres. Série réglée à enveloppe. — Faisceau osculateur. — Cas du cône et de la courbe plane. — Théorème sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. — Éléments de contact de Lie. — Faisceaux plans dépendant d'un paramètre. — Bandeaux. — Théorème général sur les faisceaux plans à enveloppes. — Propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes de droites. — Complexes tangents. — Corrélation normale. — Ses propriétés. — Faisceaux plans d'un complexe. — Invariant de Klein. — Droites singulières. — Surface de singularités. — Théorème de Pasch. — Complexes singuliers. — Théorème de Cayley et Klein. — Congruences. — Surfaces focales. — Couples focaux. — Développables. — Complexes linéaires tangents. — Cas particuliers. — Invariant. — Congruences de tangentes asymptotiques. — Cas de dégénérescence.

47. Nous allons, dans ce Chapitre, développer les *premiers principes* de Géométrie infinitésimale en coordonnées de droites.

Supposons qu'une droite x dépende d'un paramètre t; elle engendre une série réglée qui peut constituer une surface gauche, une développable, un cône ou l'ensemble des tangentes d'une courbe plane.

Examinons d'abord le cas où la série constitue une surface gauche. On sait que la distribution des plans tangents en chaque point d'une génératrice rectiligne s'opère au moyen d'une corrélation homographique, dont nous avons déjà parlé, et que nous appelons la *corrélation* de Chasles.

L'ensemble des tangentes à la surface en tous les points de la génératrice x constitue une congruence linéaire singulière; tous les complexes linéaires qui contiennent cette congruence définissent sur x la même corrélation normale, à savoir la corrélation de Chasles.

Ces complexes forment un système à deux termes facile à représenter.

On peut regarder la congruence des tangentes comme l'ensemble des droites assujetties à couper les droites voisines x et $x + x' dt$, où $x' = \frac{dx}{dt}$. Elle est donc

définie par les deux équations suivantes, où y est la droite courante,

$$2\omega(x \mid y) = \sum \frac{\partial\omega}{\partial x_i} y_i = 0,$$

$$2\omega(x + dx \mid y) = \sum \left[\frac{\partial\omega}{\partial x_i} + \frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i}\,dt\right] y_i = 0,$$

c'est-à-dire

(1) $$\sum \frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i} y_i = 0.$$

Le système à deux termes considéré aura donc pour équation

(2) $$\sum \left[\lambda \frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i}\right] y_i = 0,$$

ou encore

(3) $$\omega(\lambda x + \mu x' \mid y) = 0.$$

On voit qu'il ne contient qu'un seul complexe spécial, car les complexes spéciaux du système, d'après la forme de l'équation (3), auront pour directrices des droites dont les coordonnées seront comprises dans la formule

$$\lambda x_i + \mu x'_i;$$

or ces expressions ne sont les coordonnées d'une droite que si

$$\omega(\lambda x + \mu x') = 0,$$

c'est-à-dire, si

$$\omega(x)\lambda^2 + 2\omega(x \mid x')\lambda\mu + \omega(x')\mu^2 = 0,$$

ou enfin, si

$$\omega(x')\mu^2 = 0,$$

car

$$\omega(x) = 0, \qquad 2\omega(x \mid x') = \frac{d\,\omega(x)}{dt} = 0.$$

Il se pourrait que $\omega(x')$ fut nul; mais alors, comme nous le verrons plus loin, la série réglée ne constitue plus une surface gauche. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, il n'y a donc qu'une seule solution, à savoir

$$\mu = 0.$$

On dit de deux surfaces réglées qu'elles se raccordent suivant une génératrice commune si, en chaque point de cette génératrice, le plan tangent est le même, ..i exige que la corrélation de Chasles soit la même pour les deux surfaces. ..t une infinité d'hyperboloïdes et de paraboloïdes qui remplissent cette condi-

tion, ce sont les *quadriques de raccordement;* dont l'usage est si répandu en Géométrie descriptive. Toute quadrique contenue dans la congruence linéaire des tangentes est évidemment une quadrique de raccordement.

48. Je désigne par C_x cette congruence linéaire; il est clair que la droite voisine donne lieu à une autre congruence $C_x + dx$; on peut démontrer que *ces deux congruences ont en commun une même demi-quadrique.*

En effet, les équations (1) représentent C_x; si l'on y change x en $x + x'\,dt$ et x' en $x' + x''\,dt$, où $x''_i = \dfrac{dx'_i}{dt}$, on aura la représentation de $C_x + dx$; on trouve ainsi

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left[\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i}\,dt \right] y_i = 0, \\ &\sum \left[\frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i} + \frac{\partial\,\omega(x'')}{\partial x''_i}\,dt \right] y_i = 0; \end{aligned} \right.$$

ces équations, jointes aux équations (1), ne donnent en tout que trois équations

$$(5)\qquad \sum \frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}\,y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial\,\omega(x')}{\partial x'_i}\,y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial\,\omega(x'')}{\partial x''_i}\,y_i = 0.$$

Ces trois équations sont celles de trois complexes, qui ont en commun une demi-quadrique $\mathfrak{Q}$.

Une droite quelconque y de cette demi-quadrique doit, d'après les équations (5), couper trois droites consécutives de la surface réglée; ces droites y sont donc les tangentes asymptotiques du second système menées en tous les points de la droite x; la demi-quadrique $\mathfrak{Q}$ est ainsi constituée par un système de génératrices de l'*hyperboloïde osculateur* de la surface.

49. La demi-quadrique complémentaire $\mathfrak{Q}_0$ se trouve reliée à la théorie générale du contact d'une surface réglée avec un complexe linéaire.

Soit un complexe linéaire

$$\Sigma \xi_i x_i = 0,$$

nous dirons qu'il a, avec une surface réglée donnée, un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre s'il contient $(p + 1)$ génératrices consécutives de la surface.

Les complexes tangents vérifient donc les deux équations

$$\Sigma \xi_i x_i = 0, \qquad \Sigma \xi_i x'_i = 0,$$

lesquelles indiquent que ces complexes linéaires tangents forment un système à quatre termes, complémentaire du système à deux termes représenté par l'équation (2).

Considérons maintenant les complexes qui ont, avec la surface, un contact du second ordre; ils sont soumis aux conditions

$$(6) \qquad \Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0 \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0.$$

Ces équations ne se réduiraient à deux que si l'on avait les six relations

$$\alpha x''_i - \beta x'_i - \gamma x_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6);$$

or, dans ce cas, les x_i étant solutions d'une même équation du second ordre, on pourrait poser

$$x_i = C_i T + C'_i T_0,$$

les C_i, C'_i désignant des constantes, et T, T_0 des fonctions de t : la série réglée se réduirait à un faisceau plan.

Les équations (6) étant supposées distinctes, les complexes qu'elles définissent forment un système à *trois* termes.

Le système complémentaire nous est connu, c'est le système

$$(7) \qquad \sum \left[\lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} \right] y_i = 0,$$

lequel comprend tous les complexes linéaires qui contiennent la demi-quadrique $\mathfrak{Q}$.

En effet, l'involution du complexe (7) avec le complexe ξ s'écrit

$$(8) \qquad 2\Omega(\xi \mid u) = \sum \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u_i} \xi_i = 0,$$

en posant

$$u_i = \lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i},$$

et, comme de cette équation de définition on tire

$$\lambda x_i - \mu x'_i + \nu x''_i = \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u_i},$$

l'équation (8) s'écrit

$$\lambda \Sigma \xi_i x_i + \mu \Sigma \xi_i x'_i - \nu \Sigma \xi_i x''_i = 0.$$

Tous les complexes (7) sont ainsi en involution avec les complexes ξ qui vérifient les équations (6).

Les complexes ξ ont donc bien en commun la demi-quadrique $\mathfrak{Q}_0$, complémentaire de la quadrique $\mathfrak{Q}$, c'est-à-dire les génératrices de l'hyperboloïde osculateur de même système que x.

50. Considérons maintenant les complexes qui ont, avec la surface, un triple contact; ils sont définis par les quatre équations

$$(9) \qquad \Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'''_i = 0,$$

lesquelles sont distinctes, à moins que l'on n'ait six équations de la forme

$$\alpha x'''_i + \beta x''_i + \gamma x'_i + \delta x_i = 0.$$

Or, si cela a lieu, les x_i ont la forme

$$(10) \qquad x_i = C_i T + C'_i T_0 + C''_i T_{00},$$

où les C sont des constantes, et T, T_0, T_{00} trois fonctions de t.

Formons

$$\omega(x) = \omega(CT + C'T_0 + C''T_{00}) = 0,$$

ou, en développant,

$$\omega(C)T^2 + \omega(C')T_0^2 + \omega(C'')T_{00}^2 + 2\omega(C \mid C')TT_0 + 2\omega(C \mid C'')TT_{00} + 2\omega(C' \mid C'')T_0 T_{00} = 0.$$

Si les coefficients de cette forme en T, T_0, T_{00} sont nuls identiquement, la droite x est contenue dans un hyperfaisceau fixe; la série réglée est formée des génératrices d'un cône ou des tangentes d'une courbe. Ce cas exclu, il peut se faire encore que l'équation quadratique ci-dessus ne soit pas identique. Mais alors on vérifie cette équation en prenant pour T, T_0, T_{00} des polynômes du second degré d'un paramètre s, que l'on peut substituer au paramètre t. Les formules (10) prennent la forme

$$x_i = D_i s^2 + D'_i s + D''_i.$$

La série réglée est alors une demi-quadrique.

Ce nouveau cas exclu, les équations (9) sont distinctes, et les complexes ξ, qui les vérifient, forment un système à quatre termes. Le système à deux termes complémentaire comprend deux complexes spéciaux, dont les directrices Δ, Δ' possèdent la propriété, en vertu des équations (9), de couper quatre génératrices consécutives de la surface. Ces droites Δ et Δ' ont donc un contact du troisième ordre avec la surface, chacune en un point de la droite x.

Si l'on considère l'hyperboloïde osculateur relatif à une droite x et l'hyperboloïde osculateur relatif à la droite voisine $x + dx$, ces deux hyperboloïdes se coupent suivant deux génératrices voisines de x et suivant deux autres génératrices du système opposé. Ces deux génératrices sont les droites Δ et Δ'.

Considérons enfin un complexe linéaire qui ait un contact du quatrième ordre avec la surface réglée. On devra avoir

$$\Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x^{\text{IV}}_i = 0,$$

et ces cinq équations, si elles sont distinctes, définiront les rapports des ξ; le complexe sera parfaitement déterminé.

Il n'y aurait indétermination que s'il existait six équations de la forme

$$\alpha x_i^{\text{IV}} + \beta x_i''' + \gamma x_i'' + \delta x_i' + \varepsilon x_i = 0,$$

équations qui prouvent que, entre les x_i, il existe au moins deux relations linéaires à coefficients constants.

La surface ou série réglée fait donc partie, dans ce cas, d'une congruence linéaire. Les surfaces réglées contenues dans une congruence linéaire jouent un rôle fort important et nous les retrouverons plus loin. Pour elles, le complexe *osculateur* est forcément indéterminé.

Si l'on considère les complexes osculateurs relatifs à deux droites voisines x et $x + dx$ d'une surface réglée, les directrices de leur congruence commune sont les droites Δ et Δ' déjà définies.

Trois complexes osculateurs consécutifs ont en commun la demi-quadrique $\mathfrak{Q}_0$ déjà définie.

Quatre complexes osculateurs consécutifs ont en commun deux droites *infiniment voisines* de la droite x.

Le lecteur prouvera aisément ces propriétés. La dernière montre que, si l'on prend arbitrairement un complexe linéaire dépendant d'un paramètre, ce complexe n'est pas toujours osculateur à une surface réglée; car quatre complexes consécutifs du système se coupent suivant deux droites qui sont généralement distinctes.

51. On a exclu, jusqu'ici, l'hypothèse de $\omega(x') = 0$. Soit maintenant

$$\omega(x') = 0.$$

Les complexes (2) sont tous spéciaux, et les x_i' sont les coordonnées d'une droite x' qui est la directrice de l'un de ces complexes. Les droites x, x' se coupent en un point O et ont en commun un plan π; les droites du faisceau plan (O, π) sont précisément les directrices des complexes (2). La congruence C_x des droites qui coupent deux droites consécutives x et $x + x'dt$ se décompose donc ici dans l'ensemble des droites du plan π et l'ensemble des droites issues du point O.

On peut dire que les droites consécutives x et $x + x'dt$ se coupent au point O et ont en commun le plan π. On peut même apprécier à quel ordre infinitésimal près cette rencontre a lieu.

En effet, la condition de rencontre de deux droites x et z peut s'écrire

$$\omega(z - x) = \omega(z) + \omega(x) - 2\omega(z \mid x) = -2\omega(z \mid x) = 0.$$

attendu que $\omega(x) = 0$, $\omega(z) = 0$. Prenons

$$z_i = x_i + x'_i \Delta t + x''_i \frac{\Delta t^2}{2} + x'''_i \frac{\Delta t^3}{6} + \ldots,$$

et l'on trouve sans peine

$$\omega(z - x) = \omega(x')\Delta t^2 + \frac{1}{2}\frac{d\omega(x')}{dt}\Delta t^3 + \left[\frac{1}{6}\frac{d^2\omega(x')}{dt^2} - \frac{1}{12}\omega(x'')\right]\Delta t^4 + \ldots.$$

Si donc $\omega(x')$ est nul pour chaque droite de la série réglée, $\omega(z - x)$, qui est généralement du deuxième ordre, se réduit au quatrième

$$(11) \qquad \omega(z - x) = -\tfrac{1}{12}\omega(x'')\Delta t^4 + \ldots;$$

on retrouve là, sous une autre forme, une propriété mise en évidence pour la première fois par M. Bouquet.

Nous verrons, en effet, que, si l'on fait usage d'éléments métriques, $\omega(z - x)$ est proportionnel au produit de la plus courte distance p des droites x et z par le sinus de leur angle ε ou par cet angle lui-même, soit

$$p\varepsilon.$$

Si l'on prend comme infiniment petit principal l'élément ε de l'arc de l'indicatrice sphérique des génératrices de la série réglée, $p\varepsilon$ sera d'un ordre infinitésimal supérieur d'une unité à celui de p. Si donc $\omega(x')$ est nul, $p\,\varepsilon$ étant du quatrième ordre, p sera du troisième, et c'est là justement le théorème de M. Bouquet.

En général, la série réglée sera formée des tangentes d'une courbe gauche. Le point O de rencontre des droites consécutives sera le point de contact de la courbe avec x, et le plan π sera le plan osculateur. D'après cela, les droites du faisceau plan (O, π), que j'appellerai le *faisceau plan osculateur,* auront une représentation de la forme

$$(12) \qquad x_i + \lambda x'_i.$$

Cette représentation nous sera très utile.

52. Il se pourrait, cependant, que la série réglée fût formée des génératrices d'un cône ou des tangentes d'une courbe plane; mais alors les formules prennent un caractère très spécial. On remarque, en effet, que deux droites quelconques de la série réglée se coupent dans ce cas, puisqu'elles font toutes partie d'un même hyperfaisceau (gerbe ou système plan). L'expression $\omega(z - x)$ doit donc être rigoureusement nulle, et, par suite, il faudra avoir

$$\omega(x'') = 0,$$

car le terme Δt^4 doit disparaître. Il est inutile de chercher à exprimer que les

termes en Δt^2, ... disparaissent. Je vais, en effet, prouver que, si l'on a

$$\omega(x'') = 0,$$

la série réglée est contenue dans un hyperfaisceau.

On tire, en effet, des équations

$$\omega(x) = 0, \quad \omega(x') = 0, \quad \omega(x'') = 0,$$

par différentiation, l'ensemble des équations

$$\begin{array}{lll}
\omega(x|x) = 0, & \omega(x'|x) = 0, & \omega(x''|x) = 0, \\
\omega(x|x') = 0, & \omega(x'|x') = 0, & \omega(x''|x') = 0, \\
\omega(x|x'') = 0, & \omega(x'|x'') = 0, & \omega(x''|x'') = 0, \\
\omega(x|x''') = 0, & \omega(x'|x''') = 0, & \omega(x''|x''') = 0,
\end{array}$$

qui peuvent se résumer en disant que $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$, $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_6)$, $(x'''_1, x'''_2, \ldots, x'''_6)$ sont quatre systèmes de solutions des équations linéaires en $u_1, u_2, \ldots, u_6$

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l}
2\omega(x|u) = \sum \dfrac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} u_i = 0, \\
2\omega(x'|u) = \sum \dfrac{\partial\omega(x')}{\partial x'_i} u_i = 0, \\
2\omega(x''|u) = \sum \dfrac{\partial\omega(x'')}{\partial x''_i} u_i = 0.
\end{array}\right.$$

Ces trois équations en u_i sont distinctes, car, s'il existait une identité de la forme

$$\lambda\,\omega(x|u) + \mu\,\omega(x'|u) + \nu\,\omega(x''|u) = 0,$$

on aurait

$$\lambda \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial\omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial\omega(x'')}{\partial x''_i} = 0$$

ou

$$\frac{\partial\omega(\lambda x + \mu x' + \nu x'')}{\partial(\lambda x_i + \mu x'_i + \nu x''_i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

et, comme ω a son discriminant non nul, cela exigerait que l'on eût

$$\lambda x_i + \mu x'_i + \nu x''_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Nous avons déjà vu que, dans ce cas, la série réglée est un faisceau plan.

Dès lors, les trois équations (13) étant distinctes et ayant lieu entre six variables, tout système de solutions de ces équations se déduit linéairement de trois autres systèmes particuliers, mais indépendants. Il doit donc exister des relations

ETC.

te droite de ce

te de contact du

s le plan π, et la
isceau (o, π), il

que la droite Δ
instant la tan-
istique de son
une courbe C,
ndrée par le
x plans ainsi
courbe et une

nt recours
auxiliaires

Soient, plus généralement, un faisceau quelconque (o, π) et a, b deux droites de ce faisceau, dépendant d'un paramètre t. Toute droite z du faisceau sera représentée par

$$z_i = a_i\lambda + b_i\mu.$$

Je considère une droite variable quelconque C passant au point O et dépendant aussi du paramètre t, la gerbe des droites issues de O sera représentée par

$$z_i = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu;$$

à chaque valeur de $\lambda : \mu : \nu$ correspond une droite z de la gerbe, et si $\lambda : \mu : \nu$ sont fonctions de t, la droite z se déplace avec le point O. Cherchons ce que sont λ, μ, ν lorsque z est précisément la tangente à la courbe lieu du point O.

Il suffit d'écrire que $\lambda : \mu : \nu$ sont des fonctions de t telles que la droite z a une enveloppe qu'elle touche au point O, ou d'exprimer que le faisceau osculateur a deux de ses droites dans la gerbe. La droite z est déjà une droite du faisceau; il suffit donc d'écrire que la droite z', dont les coordonnées sont $z'_1, \ldots, z'_6$, fait partie de la gerbe ou que

$$z'_i = a_i\varepsilon + b_i\varepsilon_1 + c_i\varepsilon_2,$$

c'est-à-dire

$$a'_i\lambda + b'_i\mu + c'_i\nu + a_i\lambda' + b_i\mu' + c_i\nu' = a_i\varepsilon + b_i\varepsilon_1 + c_i\varepsilon_2,$$

équations de la forme

$$(14) \qquad a'_i\lambda + b'_i\mu + c'_i\nu = a_i\rho + b_i\sigma + c_i\tau.$$

Je multiplie par $\dfrac{\partial\omega(a)}{\partial a_i}$ et je somme de $i = 1$ à $i = 6$; il vient

$$\omega(a \mid a')\lambda + \omega(a \mid b')\mu + \omega(a \mid c')\nu = \omega(a)\rho + \omega(a \mid b)\sigma + \omega(a \mid c)\tau = 0,$$

car

$$\omega(a) = 0, \qquad \omega(a \mid b) = 0, \qquad \omega(a \mid c) = 0.$$

On a aussi

$$\omega(a \mid a') = 0,$$

il reste donc

$$\omega(a \mid b')\mu + \omega(a \mid c')\nu = 0.$$

Mais comme $\omega(a \mid c) = 0$, on a

$$\frac{d\omega(a \mid c)}{dt} = \omega(a' \mid c) + \omega(a \mid c') = 0,$$

et, par suite, l'équation obtenue peut s'écrire

$$\omega(a \mid b')\mu - \omega(c \mid a')\nu = 0.$$

On trouverait de même

$$\omega(a \mid b')\lambda - \omega(b \mid c')\nu = 0,$$
$$\omega(c \mid a')\lambda - \omega(b \mid c')\mu = 0$$

ent tombe en
n point et un
mètre, consti-
nnée *a priori*
semble possède

. On a, dans ces

épendent de plu-

es faisceaux plans.
z les coordonnées

tés x, y, z, p, q.
aramètres et que, de
nt O ait lieu, au se-
soit la loi de variation
plan π.

entre x, y, z.
où entre x, y, z il exis-

entre x, y une relation,
ici

soient les coordonnées de la tangente à la courbe lieu du point O, laquelle, par hypothèse, appartient au faisceau.

Les équations (14) donnent, puisque ν est nul,

$$a'_i\lambda - a'_i\mu = \rho a_i + \sigma b_i + \tau c_i.$$

d'où

$$\omega(a'\lambda + b'\mu) = \omega(\rho a + \sigma b + \tau c) = 0;$$

on a donc

$$(16) \qquad \omega(a')\lambda^2 + 2\omega(a' \mid b')\lambda\mu + \omega(b')\mu^2 = 0,$$

équation qui donne pour $\lambda : \mu$ deux valeurs : l'une fournira la tangente à la courbe lieu du point O; l'autre, comme on le voit aisément, donnera la caractéristique du plan.

56. Il y a coïncidence de ces droites, si

$$(17) \qquad [\omega(a' \mid b')]^2 - \omega(a')\omega(b') = 0.$$

Supposons, pour simplifier, que a soit justement la tangente au lieu du point O; cela est toujours permis. On a, dans ce cas,

$$\omega(a') = 0,$$

puisque a est tangente à une courbe.

Nous pouvons donc regarder les a'_i comme les coordonnées d'une droite a', laquelle, comme on va le voir, fait partie du faisceau (o, π). L'équation (17), puisque $\omega(a') = 0$, donne en effet

$$\omega(b' \mid a') = 0,$$

en sorte que la droite a' fait partie du complexe linéaire

$$(18) \qquad \omega(b' \mid x) = 0.$$

Ce complexe ne serait spécial que si l'on avait $\omega(b') = 0$. Si le point O ou le plan π ne sont pas fixes l'un ou l'autre, auquel cas toutes les droites des faisceaux considérés se couperaient, on peut toujours supposer que la droite b du faisceau n'a pas d'enveloppe et que $\omega(b')$ n'est pas nul.

Les équations

$$\omega(b' \mid a) = 0, \qquad \omega(b' \mid b) = 0$$

prouvent que les droites a, b font partie du complexe (18) et que π est le plan polaire du point O. La droite a' du complexe étant issue de O doit donc être dans le plan π.

Le faisceau (o, π) *est donc le faisceau osculateur de la courbe lieu du point* O.

ou, ce qui est la même chose,

(19′) $$\omega(b \mid da) = 0,$$

car

$$0 = d\,\omega(a \mid b) = \omega(a \mid db) + \omega(b \mid da).$$

On voit donc qu'un faisceau dépendant de plusieurs paramètres et qui vérifiera la condition

$$\omega(b \mid da) = 0$$

devra être constitué :

Soit par un point d'une surface et le plan tangent en ce point;

Soit par un point d'une courbe et un plan quelconque tangent à la courbe en ce point;

Soit par le plan tangent d'une développable et un quelconque des points de contact de ce plan avec la développable;

Soit par un point et un plan d'une droite, arbitrairement associés;

Soit par un point d'un plan, associé à ce plan;

Soit par un plan mené par un point, associé à ce point.

Nous dirons, dans tous les cas, que le faisceau a une enveloppe si

$$\omega(b \mid da) = 0.$$

Les faisceaux à enveloppe ne dépendent, on le voit, que de deux paramètres. En sorte que, *si l'on se trouve en présence de faisceaux variables dépendant de plusieurs paramètres, la condition*

$$\omega(b \mid da) = 0$$

entraîne que les paramètres dont dépendent les faisceaux sont réductibles à deux.

Nous aurons bientôt à faire une application de cette remarque.

Je passe maintenant à l'étude des propriétés infinitésimales des complexes de droites.

59. Soient le complexe de droites

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = f(x) = 0,$$

x une droite de ce complexe, $\omega(x)$ la forme fondamentale, et je considère le système de complexes linéaires à deux termes

(20) $$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) y_i = 0,$$

Je donnerai à ces complexes le nom de *complexes linéaires tangents.*

ce qui prouve que le système des faisceaux $(0, \pi)$ est constitué par les points d'une surface et le plan tangent en chacun de ces points.

Admettons qu'il existe deux relations

$$z = \varphi(x), \qquad y = \psi(x),$$

nous aurons

$$dz = \varphi'(x)\,dx, \qquad dy = \psi'(x)\,dx,$$

d'où

$$[\varphi'(x) - p - q\,\psi'(x)]\,dx = 0.$$

Si dx était nul, il y aurait trois relations entre x, y, z, ce n'est pas le cas. On a donc

$$\varphi'(x) - p - q\,\psi'(x) = 0,$$

et il n'y a pas d'autre relation entre x, y, z, p, q, car z, y, p, q seraient fonctions de la seule variable x, et les faisceaux ne dépendraient pas de *plusieurs* paramètres.

Nous avons donc ici l'ensemble des faisceaux obtenus en associant à chaque point d'une courbe un plan tangent *quelconque* à la courbe en ce point.

Si enfin trois relations existent entre x, y, z, alors on a des faisceaux dont le point est fixe; le plan seul devant être variable et contenir au moins deux paramètres, le plan devra être l'un quelconque de ceux qui passent au point fixe.

Comme cas particulier des surfaces, on a la développable qui donne des faisceaux dans lesquels le plan ne dépend que d'un paramètre, et le plan qui fournit des faisceaux dont le plan est fixe et dont le point est quelconque dans ce plan. Ces deux cas sont dualistiques des deux que l'on a considérés en premier lieu.

Un cas intermédiaire est celui des faisceaux obtenus en associant chaque point d'une droite à un point de cette droite. Dans ce cas, en effet, le point ne dépend que d'un paramètre, le plan dépend d'un autre et ces deux paramètres sont indépendants.

58. Ces faits trouvent une représentation fort simple et élégante en coordonnées de droites.

Prenons, en effet, le faisceau plan

$$z_i = a_i + \lambda b_i,$$

où les droites a, b dépendent de plusieurs paramètres; que faudra-t-il pour que ces faisceaux aient une enveloppe? c'est-à-dire pour que, quel que soit le déplacement du faisceau, la tangente à la courbe décrite par O et, par conséquent, la caractéristique du plan du faisceau, fassent partie de ce faisceau?

Il sera nécessaire et suffisant, conformément aux résultats déjà acquis, que l'on ait, pour tous les déplacements possibles,

$$\omega(a \mid db) = 0 \tag{19}$$

de la corrélation normale du complexe sur la droite x. Cette importante propriété s'étend au cas d'un complexe quelconque.

Je vais prouver que, *si les tangentes x d'une courbe font partie d'un complexe*

$$f(x) = 0,$$

le faisceau osculateur de la courbe appartient à la corrélation normale du complexe $f = 0$ sur la droite x.

Il suffit évidemment de prouver que ce faisceau osculateur appartient à la corrélation normale du complexe tangent

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0,$$

puisque, par définition, cette corrélation est la corrélation normale du complexe $f(x) = 0$.

En effet, le faisceau osculateur est représenté par

$$\rho x_i + \sigma x'_i,$$

en supposant les x_i exprimés en fonction d'un paramètre t et posant $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Il faut prouver que

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} (\rho x_i + \sigma x'_i) = 0;$$

or cela est évident, puisque

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m\, f(x) = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i = \frac{d\, f(x)}{dt} = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

60. Quelques cas particuliers feront comprendre la portée de ce théorème capital.

Considérons un plan quelconque π mené par x, les droites du complexe $f = 0$ contenues dans ce plan enveloppent une courbe et la droite x, elle-même, touche cette courbe en un point O. Il résulte du théorème précédent que O et π se correspondent dans la corrélation normale.

Ainsi :

Si l'on fait passer un plan π par une droite x d'un complexe, la courbe enveloppe du complexe relative au plan π est touchée par la droite x en un point O; le point O et le plan π se correspondent dans la corrélation normale du complexe.

La remarque suivante justifie cette dénomination. Soit $x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \dots$ une droite du complexe voisine de x, et remplaçons y_i par $x_i + dx_i + \frac{1}{2} d^2 x_i + \dots$ dans le premier membre de (20), il viendra

$$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) y_i = \frac{1}{2} \sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) d^2 x_i + \dots,$$

en tenant compte de $df = 0$, $d\omega = 0$, c'est-à-dire un résultat du second ordre.

Si les complexes linéaires tangents forment un système à deux termes, cela tient évidemment à ce qu'un complexe ne se trouve pas représenté par une équation unique, mais bien par le système des deux équations

$$f(x) = 0, \qquad \omega(x) = 0.$$

Cherchons les complexes spéciaux tangents ; nous devrons écrire

$$\Omega\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2\lambda\mu\, \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \mu^2 \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0.$$

Mais on a

$$2\,\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \sum \frac{\partial\, \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

car $x_i = \dfrac{\partial\, \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}}$; on a aussi $\Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \omega(x) = 0$; il reste donc

$$\lambda^2 \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

L'équation qui fournit les complexes spéciaux tangents a donc ses racines égales et, par suite, les complexes tangents ne comprennent généralement qu'un seul complexe spécial, celui qui a x pour directrice. Si l'on se reporte au n° **29**, on voit que tous les complexes linéaires tangents définissent sur x la même corrélation normale ; pour ce motif, nous donnerons à cette corrélation le nom de *corrélation normale du complexe* $f(x) = 0$ *sur sa droite* x. On voit comment cette notion généralise la notion de corrélation normale d'un complexe linéaire (n° **15**).

Nous avons vu (n° **53**) que, si les tangentes x d'une courbe font partie d'un complexe linéaire, le faisceau plan osculateur appartient à ce complexe et, par suite, que le point O de contact et le plan osculateur π sont des éléments correspondants

De là suit (nº 33) que les deux corrélations normales que détermine sur x chacun des deux systèmes respectivement sont en involution. En employant la locution introduite au nº 59, on peut donc dire ceci :

Si l'on considère la corrélation de Chasles d'une surface réglée d'un complexe relative à une de ses droites x, cette corrélation est en involution avec la corrélation normale du complexe relative à x.

En d'autres termes, prenons un point O sur la droite x et menons en O le plan τ tangent à la surface, ce plan τ et le plan π homologue de O dans la corrélation normale forment un faisceau harmonique avec deux plans fixes. Ou encore :

Soient

O un point sur x;
τ le plan tangent à la surface réglée;
O′ le point correspondant à τ dans la corrélation normale;
τ' le plan tangent en O′;
τ' est le plan qui correspond à O dans la corrélation normale du complexe.

Si la surface considérée est développable (ou plus généralement forme une série réglée à enveloppe), la corrélation de Chasles est singulière et son involution avec la corrélation normale signifie que son couple singulier appartient à cette corrélation. C'est précisément le théorème du nº 59.

62. Considérons toutes les droites x d'un complexe et tous les faisceaux plans (O, π) dont le point et le plan sont des éléments correspondants de la corrélation normale du complexe sur une droite x. J'appellerai ces faisceaux plans les *faisceaux plans* du complexe. On voit comment cette définition généralise celle que nous avons donnée au nº 13 pour le cas d'un complexe linéaire.

Soient (O, π) un faisceau du complexe, x la droite du complexe dont la corrélation normale admet comme éléments correspondants le point O et le plan π. Le cône du complexe qui a pour sommet le point O sera tangent suivant x au plan π, et la courbe enveloppe des droites du complexe relative au plan π touchera en O la droite x. On peut donc énoncer ces théorèmes :

Les plans π des faisceaux du complexe dont le point O est donné enveloppent le cône du complexe qui a pour sommet ce point.

Le lieu des points O des faisceaux d'un complexe dont le plan est donné est la courbe enveloppe des droites du complexe relative à ce plan.

Le cône du complexe est ainsi le lieu enveloppe des plans dont la courbe enve-

... en plan est le

... la

... le sommet O

... angents

... (n° 59), par

... remarquable

... un invariant différentiel du

Σ ... $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$;

... se trouvent liés à ceux de

Σ ...

... on aura identiquement

... forme adjointe de $\omega(x)$, trans-

Ceci posé, supposons que la fonction $f(x)$ devienne $f'(x')$, en sorte que

$$f'(x') = f(x),$$

on aura

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_\rho} = \sum_i A_{i\rho} \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

or ces équations entraînent la suivante

$$\Omega'\left(\frac{\partial f'}{\partial x'}\right) = \Delta^2 \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

ce qui démontre bien l'invariance de $\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

On appelle *droite singulière* d'un complexe toute droite pour laquelle l'invariant $\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ est nul.

Il est intéressant de se rendre compte de la façon dont se comporte la corrélation normale d'une droite singulière.

Puisque les complexes tangents sont tous spéciaux et qu'ils forment un système à deux termes, il faut conclure que leurs directrices forment un faisceau plan (O, π), et, d'après la remarque du n° 30, la corrélation normale sera singulière. Toute corrélation homographique en involution avec elle devra donc contenir son couple singulier (O, π). Par suite, toute surface réglée non développable contenue dans le complexe et passant par la droite singulière x devra toucher en O le plan π.

Par contre, toute surface développable (du complexe) passant par la droite x devra ou bien admettre O sur son arête de rebroussement, ou bien toucher le plan π.

64. Nous allons trouver ici une intéressante application des principes de la représentation des surfaces par leurs tangentes exposés au n° 58.

Je vais prouver, en effet, ce théorème dû à M. Pasch :

Les faisceaux plans (O, π) *afférents à toutes les droites singulières d'un complexe ont une enveloppe.*

Puisque l'on a

$$\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,$$

si l'on pose

$$y_i = \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

les y_i sont les coordonnées d'une droite y, et cette droite est la directrice de l'un des complexes linéaires tangents.

Le faisceau plan des directrices de ces complexes, le faisceau (O, π), est donc représenté par les formules

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i.$$

Les conditions

$$\omega(x) = 0, \quad \omega(y) = 0, \quad \omega(x \mid y) = 0$$

étant évidemment remplies, il suffit de prouver (n° 58) que

$$\omega(y \mid dx) = 0,$$

ou que

$$\sum \frac{\partial \omega(y)}{\partial y_i} dx_i = 0.$$

Mais puisque l'on a posé

$$y_i = \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

on en tire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega(y)}{\partial y_i};$$

il suffit donc de prouver que

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df = 0,$$

ce qui est évident.

On a donné le nom de SURFACE DE SINGULARITÉS à cette surface remarquable (¹).

Le théorème relatif aux droites singulières tracées sur les surfaces réglées du complexe prouve, si l'on observe qu'une surface réglée du complexe contient généralement des droites singulières, prouve le théorème suivant :

Toute surface réglée du complexe touche généralement la surface de singularités en un certain nombre de points.

65. Maintenant le théorème du n° 58 nous permet de démontrer le théorème suivant partiellement trouvé par M. Cayley et complété par M. Klein.

Si, pour un complexe de droites, on a

$$\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,$$

identiquement ou en vertu de $f = 0$, $\omega = 0$, *les droites du complexe ont une*

(¹) On voit qu'il pourra arriver que la surface de singularités se réduise à une simple courbe, ou que les faisceaux plans singuliers engendrent l'un des quatre autres ensembles définis au n° 58, ou un système de plusieurs de ces ensembles.

enveloppe, c'est-à-dire, touchent une surface fixe, non développable ou développable, ou bien coupent une courbe fixe.

Reprenons en effet les notations précédentes

$$y_i = \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}};$$

à *toute* droite x du complexe nous faisons ainsi correspondre une droite y qui la coupe en un point O, et a avec elle en commun un plan π.

Le faisceau (O, π) a pour représentation

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i.$$

On pourrait croire qu'il dépend de trois paramètres comme la droite x, et s'il ne dépend que de deux en réalité, du moins on ne le sait pas *a priori;* mais, quoi qu'il en soit, puisque l'on a

$$2\omega(y \mid dx) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df = 0,$$

on est assuré que le faisceau (O, π) a une enveloppe (n° 58). *Et dès lors il ne dépend pas de plus de deux paramètres.* Si O décrit une surface, π touche la surface et le complexe est celui des tangentes à cette surface. Si, au contraire, O décrit une courbe, toutes les droites du complexe coupent cette courbe, et leur ensemble est défini par cette condition.

Nous aurons à voir plus loin comment se différentient ces deux cas.

66. Les propriétés infinitésimales des congruences sont connues depuis beaucoup plus longtemps que celles des complexes. Elles se sont présentées aux géomètres dès les premières recherches sur la théorie des surfaces. Dans son Traité de Géométrie, M. G. Darboux leur a consacré une place importante et a ajouté à l'intérêt que les géomètres leur prêtaient déjà en les rattachant aux recherches de Laplace sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Nous aurons occasion d'insister sur le rôle de ces équations dans l'étude des congruences. Je vais auparavant rappeler les principales propriétés des congruences de droites.

Les droites d'une congruence sont généralement tangentes à deux surfaces; cependant, dans certains cas, ces surfaces peuvent se réduire à des courbes ou coïncider.

Soit une congruence commune à deux complexes A et B; soit x une droite de cette congruence. Les corrélations normales H_A, H_B des complexes A, B sur la droite x ont en commun deux couples (F, Φ') (F', Φ) : les couples (F, Φ) (F', Φ') inverses (n° **21**) de ces couples jouent un rôle particulièrement important; nous

les appellerons les *couples focaux* : F, F' seront les *foyers* et Φ, Φ' les *plans focaux* de la droite x.

Les couples focaux peuvent être réels ou imaginaires, ou même confondus.

Supposons-les d'abord distincts. Les droites x dépendent de deux paramètres (n° 9), les points F, F', les plans Φ, Φ' dépendront donc en général de deux paramètres. Les points F et F' décriront donc en général deux surfaces S et S' (respectivement) que l'on appelle les *surfaces focales*. Cependant il se peut que le point F, par exemple, décrive une courbe, auquel cas nous dirons que la surface focale S se réduit à une courbe.

Considérons une surface réglée contenue dans la congruence et passant par la droite x; elle détermine sur x une corrélation de Chasles qui doit être (n° 61) en involution avec chacune des corrélations normales H_A, H_B et qui, par conséquent (n° 25), doit admettre les couples $(F, \Phi)(F', \Phi')$ inverses des couples (F, Φ) (F', Φ), communs à H_A et H_B. En un mot, *toute corrélation de Chasles définie sur x par une surface réglée de la congruence doit admettre les couples focaux*. Ou encore : *Toute surface réglée de la congruence qui passe par x touche en* F *le plan* Φ *et en* F' *le plan* Φ'.

Considérons les corrélations de Chasles singulières qui appartiennent à la congruence. Ces corrélations sont définies par la condition d'être en involution avec H_A et H_B. Donc, d'après le n° 25, leur couple singulier est (F, Φ') pour l'une et (F', Φ) pour l'autre.

On peut en conclure qu'autour de chaque droite x de la congruence il y a deux droites voisines $x + dx$, $x + d'x$ de la congruence qui forment avec x chacune *un élément* de série réglée à enveloppe; nous dirons, pour abréger, un élément de développable.

Il y a donc deux manières de déplacer continuement une droite d'une congruence, à partir d'une position donnée quelconque, de telle sorte que la droite engendre une développable. La congruence peut ainsi être de deux manières décomposée en développables d'une famille. Par chaque droite x de la congruence, il passe deux de ces développables, et les faisceaux osculateurs de ces développables sont respectivement (F, Φ') et (F', Φ). Les deux développables en question ne sont donc réelles qu'autant que ces deux couples le sont.

Envisageons d'abord le cas où S et S' sont de vraies surfaces. Considérons une développable formée des droites de la congruence; l'arête de cette développable est un lieu des points F, elle est tracée sur S. Nous aurons donc sur S une famille de courbes C dont les tangentes engendrent la congruence. Pareillement, nous aurons sur S' une famille de courbes C' dont les tangentes engendrent également la congruence.

Toute droite x de la congruence est tangente en F à une courbe C et en F' à



une courbe C′; *elle est donc tangente en ses foyers aux surfaces focales* S et S′.

Toute surface réglée formée de droites de la congruence se trouve ainsi circonscrite à la fois aux surfaces S et S′. Or son plan tangent en F est le plan Φ, son plan tangent en F′ est le plan Φ′.

Les couples focaux (F, Φ), (F, Φ′) *sont donc tangents aux surfaces focales.*

Considérons en particulier la développable dont une courbe C′ est l'arête; elle est circonscrite à S suivant une courbe D. Lorsque C′ décrit la surface S′, la courbe D engendre sur S une famille de courbes. Je dis que les *courbes* C *et* D *forment sur* S *un réseau conjugué.*

En effet, la courbe D est la courbe de contact de S avec une développable dont la génératrice rectiligne qui passe en F touche, en ce point, la courbe C. La tangente à D au point F et la droite x tangente à C en F sont donc deux tangentes conjuguées au sens de Dupin.

Pareillement, les développables qui ont pour arêtes les courbes C sont circonscrites à S′ suivant des courbes D′ qui forment avec les courbes C′ un système conjugué.

On voit qu'une congruence établit une correspondance point par point entre ses surfaces focales. Au point F pris sur S correspond F′ pris sur S′ et inversement. Lorsque deux surfaces se correspondent point par point, il existe généralement sur chacune deux familles de courbes conjuguées dont l'image sur l'autre est un autre couple de familles conjuguées. Ici, ces deux familles sont les courbes C, D sur S et les courbes C′, D′ sur S′, car, si F décrit une courbe C, F′ décrit une courbe D′, et si F décrit une courbe D, F′ décrit une courbe C′.

Il y a lieu toutefois d'observer, et nous reviendrons sur ce point, que si les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes S et S′, à tout système conjugué tracé sur S correspond sur S′ un autre système conjugué.

67. Le cas où une des surfaces S, S′, ou même toutes les deux, deviennent des courbes, n'offre aucune difficulté. Supposons que F décrive une courbe V et F′ une surface S′, cette surface étant encore le lieu des courbes C′, arêtes des développables d'une famille formées avec les droites de la congruence, ces droites sont assujetties à la double condition de couper V et de toucher S′. Seulement, ici, les développables d'une famille se réduiront aux cônes dont le sommet F est pris sur la courbe V et qui sont circonscrits à S′.

Les courbes D′ seront les courbes de contact de ces cônes.

Quant aux courbes C′, ce seront les arêtes de développables passant par la courbe V.

Si la surface S′ elle-même se réduit à une courbe V′, la congruence est l'ensemble des droites qui coupent V et V′; les développables de la congruence seront alors les cônes passant par V′ et dont les sommets sont sur V, et les cônes passant par V′ et dont les sommets sont sur V′.

Un exemple intéressant est fourni par les droites qui coupent deux coniques focales l'une de l'autre. Tous les cônes sont alors de révolution.

Nous avons déjà rencontré un exemple de surfaces focales réduites à des lignes, dans la congruence linéaire.

68. Il ne sera pas inutile de reprendre, par une autre voie, l'exposition de ces résultats.

Soient les équations des complexes A et B

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 0,$$

et x une droite de la congruence commune; je considère l'équation

$$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) y_i = 0. \tag{21}$$

Dans cette équation, y désigne une droite courante et λ, μ, ν trois arbitraires; $\omega(x)$ est, comme toujours, la forme fondamentale. Cette équation représente un système à trois termes de complexes linéaires qui ont en commun une demi-quadrique dégénérée (n° 40).

Formons, en effet, l'invariant

$$\begin{aligned}\Omega&\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\\ &= \Omega\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \nu^2 \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \nu \sum \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

On a d'abord

$$\Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \omega(x) = 0,$$

$$x_i = \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}},$$

et, par suite, le coefficient de ν s'écrit

$$\sum x_i \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \lambda m f(x) + \mu m' g(x),$$

où m, m' sont les degrés d'homogénéité de f et de g. Comme $f = g = 0$, on a

donc

$$\Omega\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial g}{\partial x}+\nu\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)=\Omega\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

ou, en développant,

$$(22)\qquad =\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\lambda^2+2\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\middle|\,\frac{\partial g}{\partial x}\right)\lambda\mu+\Omega\left(\frac{g}{\partial x}\right)\mu^2.$$

Les complexes spéciaux du système s'obtiendront en prenant pour $\lambda:\mu$ les valeurs $\lambda_0:\mu_0$ et $\lambda'_0:\mu'_0$ qui annulent cet invariant. Ces complexes spéciaux formeront donc les systèmes à deux termes

$$(23)\qquad \sum\left(\lambda_0\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu_0\frac{\partial g}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)y_i=0,$$

$$(24)\qquad \sum\left(\lambda'_0\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu'_0\frac{\partial g}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)y_i=0.$$

Dans ces formules, ν demeure un paramètre arbitraire. D'après le n° 30, chacun de ces systèmes (23), (24) se compose de complexes spéciaux dont les directrices forment un faisceau plan. Nous avons donc deux faisceaux plans; j'ajoute que (F', Φ), (F, Φ') sont ces deux faisceaux. En effet, cherchons les deux faisceaux plans dont l'ensemble constitue les droites communes aux complexes (21). Ces droites communes y vérifient les équations

$$\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}y_i=0,\qquad \sum\frac{\partial g}{\partial x_i}y_i=0,\qquad \sum\frac{\partial \omega}{\partial x_i}y_i=0.$$

Elles coupent x d'après la dernière relation et comme x appartient aux deux complexes

$$\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}y_i=0,\qquad \sum\frac{\partial g}{\partial x_i}y_i=0,$$

elles ne peuvent elles-mêmes appartenir à ces deux complexes qu'à la condition de faire partie de l'un des deux faisceaux (F, Φ'), (F', Φ) qu'ont en commun les deux corrélations H_A, H_B déjà définies plus haut. Puisque les droites des faisceaux (F, Φ'), (F', Φ) sont celles qu'ont en commun tous les complexes (21), les directrices des complexes spéciaux de ce système engendrent les couples focaux (F, Φ), (F', Φ'), inverses des deux premiers.

Supposons dès lors que les complexes (23) engendrent le faisceau (F, Φ), toute droite de ce faisceau sera ainsi représentée,

$$z_i+\nu x_i$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial\,\omega(z)}{\partial z_i}=\lambda_0\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu_0\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Il est évident que les z_i ainsi définis seront les coordonnées d'une droite particulière du faisceau (F, Φ).

Vérifions que la condition pour que (F, Φ) ait une enveloppe se trouve remplie,

$$2\omega(z \mid dx) = \sum \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} dx_i$$
$$= \sum \left(\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i = \lambda_0 \, df + \mu_0 \, dg = 0,$$

car $df = 0$, $dg = 0$.

Il est ainsi prouvé que les couples focaux possèdent une enveloppe.

Le système des complexes (21) possède une propriété qui justifie le nom de *complexes linéaires tangents* que l'on donne à ces complexes. Si l'on substitue aux y_i dans le premier membre de (21) les coordonnées d'une droite de la congruence

$$x_i + dx_i + \frac{1}{1.2} d^2 x_i + \frac{1}{1.2.3} d^3 x_i + \ldots$$

infiniment voisine de x, on trouve un résultat du second ordre au plus. Aucun autre complexe linéaire n'offre cette particularité, ainsi que le lecteur le vérifiera lui-même.

69. Bien que nous ne voulions pas placer ici une étude détaillée des congruences de droites, nous devons cependant tenir compte du cas où, pour toutes les droites de la congruence, les couples focaux coïncideraient.

Ce cas est évidemment caractérisé par le fait que les deux racines de l'équation (22) sont égales, ce qui donne

$$(25) \qquad \left[\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \,\middle|\, \frac{\partial g}{\partial x}\right)\right]^2 - \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Omega\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un invariant de la congruence; c'est même un combinant, car, si l'on pose

$$f_1 = \mathfrak{F}(f, g), \qquad g_1 = \mathfrak{G}(f, g),$$
$$\Delta = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial f},$$

on trouve

$$\left[\Omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \,\middle|\, \frac{\partial g_1}{\partial x}\right)\right]^2 - \Omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \Omega\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)$$
$$= \Delta^2 \left\{\left[\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} \,\middle|\, \frac{\partial g}{\partial x}\right)\right]^2 - \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Omega\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right\}.$$

Cherchons quelle peut bien être, dans ce cas, la définition de la congruence.

Nous n'avons plus qu'une seule famille de séries réglées à enveloppe et le

couple focal unique (F, Φ) est le lieu des directrices des complexes linéaires tangents spéciaux

$$\sum\left(\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) y_i = 0.$$

Comme plus haut, on reconnaîtra que ce couple (F, Φ) possède une enveloppe, laquelle sera généralement une surface S.

D'autre part, puisque le plan Φ′ coïncide ici avec le plan Φ, le couple (F, Φ) constitue en même temps le faisceau osculateur de l'unique développable que l'on puisse former avec les droites de la congruence, et qui passe par la droite x. L'arête C de cette développable est tracée sur S et, comme le plan osculateur Φ de C au point F est en même temps tangent à S, il en résulte que C est une ligne asymptotique de la surface S. Ceci ayant lieu pour toutes les développables de la congruence, celle-ci apparaît *comme l'ensemble des tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille de la surface* S.

Réciproquement, si l'on considère les asymptotiques C d'une famille sur une surface S, leurs tangentes constituent une congruence à couples focaux confondus.

En effet, soit généralement sur une surface S une famille de courbes C, et considérons la congruence des tangentes à ces courbes. Soit x une de ces tangentes qui touche en F une courbe C; Φ le plan tangent en F à la surface et Φ′ le plan osculateur à C en F.

Les plans Φ et Φ′ sont les plans focaux de la droite x et la seconde surface focale S′ est l'enveloppe du plan Φ′. Mais que les lignes C soient des asymptotiques de S, alors Φ′ coïncide avec Φ et les couples focaux coïncident.

70. Il nous reste à considérer ce qui arrive si, les couples focaux coïncidant, le point F décrit non plus une surface, mais une courbe V. Ce cas, assez rarement considéré, offre cependant un réel intérêt.

La congruence est composée de droites qui coupent la courbe fixe V. Par tout point F de V il passe donc une infinité de ces droites. Les droites issues de F forment un hyperfaisceau dont on peut représenter une quelconque des droites par les formules

$$z_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$$

ou

$$\omega(a) = \omega(b) = \omega(c) = \omega(a \mid b) = \omega(a \mid c) = \omega(b \mid c) = 0,$$

a_i, b_i, c_i étant des fonctions d'un paramètre u. De plus, entre λ, μ, ν doit exister une relation homogène, qui est en quelque sorte l'équation du cône que décrivent les droites de la congruence issues de F.

On a

$$dz_i = \lambda\, da_i + \mu\, db_i + \nu\, dc_i + a_i\, d\lambda + b_i\, d\mu + c_i\, d\nu$$
$$= (\lambda a'_i + \mu b'_i + \nu c'_i)\, du + (a_i\, d\lambda + b_i\, d\mu + c_i\, d\nu),$$

a'_i, b'_i, c'_i étant les dérivées de a_i, b_i, c_i prises par rapport à u. Donc

$$\omega(dz) = \omega(\lambda a' + \mu b' + \nu c')\, du^2$$
$$+ 2\omega(\lambda a' + \mu b' + \nu c' \mid a\, d\lambda + b\, d\mu + c\, d\nu)\, du + \omega(a\, d\lambda + b\, d\mu + c\, d\nu).$$

L'expression $\omega(a\, d\lambda + b\, d\mu + c\, d\nu)$ est nulle identiquement, et il reste

$$\omega(dz) = \omega(a'\lambda + b'\mu + c'\nu)\, du^2 + 2\omega(a'\lambda + b'\mu + c'\nu \mid a\, d\lambda + b\, d\mu + c\, d\nu)\, du.$$

L'équation $\omega(dz) = 0$ définit les droites de la congruence voisine de z, qui forment avec z un élément de développable. La solution $du = 0$ fournit les cônes dont le sommet est sur la courbe V. Mais ici, puisqu'il y a coïncidence des deux familles de développables, les deux solutions doivent donner $du = 0$.

Supposons λ, μ, ν exprimés en fonction de u et d'un paramètre v qui varie quand la droite décrit le cône cherché. Il faudra que le terme en $du\, dv$ disparaisse ou que l'on ait identiquement

$$\omega\left(a'\lambda + b'\mu + c'\nu \,\middle|\, a\frac{\partial\lambda}{\partial v} + b\frac{\partial\mu}{\partial v} + c\frac{\partial\nu}{\partial v}\right) = 0,$$

ce qui s'écrit, en développant,

$$\omega(b \mid c')\left(\mu\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial v}\right) + \omega(c \mid a')\left(\nu\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \lambda\frac{\partial\nu}{\partial v}\right) + \omega(a \mid b')\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) = 0.$$

Si l'on observe que $\omega(b \mid c')$, $\omega(c \mid a')$, $\omega(a \mid b')$ ne dépendent pas de v, on voit que cette équation équivaut à la relation finie

(26) $$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \omega(b \mid c') & \omega(c \mid a') & \omega(a \mid b') \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes, c'est-à-dire des fonctions de u.

La forme linéaire de cette équation nous prouve d'abord que les droites de la congruence issues du point F de la courbe V engendrent un faisceau plan. Le plan Φ de ce faisceau est évidemment le plan focal. De plus, dans la gerbe lieu des droites issues de F, la tangente FT à la courbe V est représentée par les valeurs suivantes de $\lambda : \mu : \nu$ (n° 54).

$$\frac{\lambda}{\omega(b \mid c')} = \frac{\mu}{\omega(c \mid a')} = \frac{\nu}{\omega(a \mid b')}.$$

Comme ces valeurs de $\lambda : \mu : \nu$ vérifient l'équation (26), on doit conclure que le plan Φ touche la courbe V, c'est-à-dire, conformément à la locution du n° 55, que les caractéristiques du faisceau (F, Φ) appartiennent à ce faisceau. De là résulte aussitôt que, en général, *la congruence est le lieu des droites qui touchent une développable donnée en des points d'une courbe tracée sur cette développable,* et que, exceptionnellement, elle est le lieu des faisceaux plans (F, Φ) dont le point et le plan constituent un couple d'une correspondance déterminée entre les points et les plans d'une droite fixe (n° 56).

La congruence linéaire singulière (n° 29) est le cas le plus simple que l'on puisse citer.

71. Il est souvent utile de représenter une congruence en exprimant les coordonnées x_i de l'une quelconque de ses droites x en fonction de deux paramètres u, v. De même, il est souvent utile de représenter les coordonnées d'une droite d'un complexe au moyen de fonctions de trois variables. Nous reviendrons plus tard sur cette représentation des complexes; mais je vais présenter immédiatement quelques remarques sur ce qui concerne les congruences.

Si l'on forme $\omega(dx)$, comme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv,$$

on aura

$$\omega(dx) = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2, \tag{27}$$

où

$$\mathrm{E} = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right), \qquad \mathrm{F} = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial v}\right), \qquad \mathrm{G} = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Toute équation entre u, v fournit une surface réglée de la congruence; en particulier, les intégrales de l'équation

$$\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2 = 0$$

donneront les développables de la congruence. Ces développables coïncideront si $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = 0$.

Considérons un complexe linéaire

$$\Sigma a_i y_i = 0,$$

et substituons à la place de y_i les coordonnées d'une droite de la congruence voisine de la droite x de cette même congruence

$$y_i = x_i + \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x_i}{\partial v} d^2v\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial_2 x_i}{\partial v^2} dv^2\right) + \ldots.$$

Il viendra

$$\sum a_i y_i = \sum a_i x_i + \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv^2 + \ldots$$

Si l'on choisit les a de sorte que

$$(28) \qquad \sum a_i x_i = 0, \qquad \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \qquad \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0,$$

le résultat de la substitution est

$$\sum a_i y_i = \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv^2 + \ldots;$$

il se réduit au deuxième ordre.

Pour certaines congruences, on peut déterminer le complexe $\Sigma a_i y_i = 0$ de manière à faire disparaître aussi les termes du deuxième ordre, en sorte que, *au troisième ordre près*, les droites voisines d'une droite x dans la congruence peuvent être envisagées comme contenues dans un complexe linéaire. Nous dirons que, dans ce cas, la congruence possède, suivant chacune de ses droites, un *complexe linéaire osculateur*.

Il faut, pour que les termes du deuxième ordre disparaissent, que l'on ait, en même temps que les équations (28), les suivantes

$$(29) \qquad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = 0, \qquad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = 0.$$

La compatibilité de ces équations s'exprime en écrivant que le déterminant suivant est nul

$$(30) \qquad \left| \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}, \frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}, x_i \right| = 0.$$

Or ce déterminant nul exprime évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que les x_i soient solutions d'une même équation de la forme de Laplace

$$(31) \qquad A \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + 2B \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + C \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + D \frac{\partial \theta}{\partial u} + E \frac{\partial \theta}{\partial v} + G\theta = 0.$$

Ainsi, *pour qu'une congruence admette un complexe linéaire osculateur, il faut et il suffit que les coordonnées d'une de ses droites vérifient une même équation de la forme* (31).

72. Les congruences à couples focaux confondus sont *toujours* dans ce cas.

Supposons, en effet, que $v =$ const. soient les développables de la congruence, l'expression de $\omega(dx)$ doit se réduire à dv^2 ; on a

$$\omega(dx) = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du^2 + 2\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv^2;$$

nous aurons donc

$$\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, \qquad \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

Je considère les expressions suivantes

$$\varphi_i = A\,\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + B\,\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} + C\,\frac{\partial x_i}{\partial u} + D\,\frac{\partial x_i}{\partial v} + G x_i,$$

et je forme

$$\omega(x \mid \varphi) = A\,\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + B\,\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) + C\,\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) + D\,\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\,\omega(x),$$

$$\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\varphi\right) = A\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + B\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) + C\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + D\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\,\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Ces deux expressions sont nulles. On a, en effet,

$$\omega(x) = 0, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial u} = \omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial v} = \omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\,\omega\left(x\,\Big|\,\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial u} = \omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,$$

et comme $\omega\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = 0$, on a

$$\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = 0;$$

de même

$$\frac{\partial\,\omega\left(x\,\Big|\,\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial v} = \omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,$$

et comme $\omega\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$, on a

$$\omega\left(x\,\Big|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

On a donc bien

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\,\omega(x \mid \varphi) &= \sum \frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}\,\varphi_i = 0,\\ 2\,\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\Big|\,\varphi\right) &= \sum \frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial \xi_i}\,\varphi_i = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on fait, pour un instant, $\xi_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial u}$.

Si l'on avait

$$\frac{\frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial\xi_1}}{\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial\xi_2}}{\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{\frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial\xi_6}}{\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_6}},$$

il viendrait, en appelant ρ la valeur commune de ces rapports,

$$\frac{\partial\,\omega(\xi-\rho x)}{\partial(\xi_i-\rho x_i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

ce qui exigerait que

$$\xi_i - \rho x_i = 0$$

ou

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \rho x_i,$$

d'où

$$x_i = e^{\int \rho\, du}\, V_i;$$

les rapports des x_i ne dépendraient que de v, ce qui est contraire à nos hypothèses.

L'un au moins des déterminants

$$\frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial\,\omega(\xi)}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial x_i}$$

n'est pas nul, d'après ce qui précède. Par exemple, celui qui correspond aux indices $i = 1$, $k = 2$. On peut alors déterminer l'équation

$$\text{(33)} \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial\theta}{\partial u} + D\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\theta = 0$$

de façon qu'elle admette les solutions x_3, x_4, x_5, x_6; φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 étant nuls, les équations (32) donneront dès lors, pour φ_1, φ_2, des valeurs nulles puisque le déterminant correspondant n'est pas nul.

Les six expressions φ_i étant ainsi nulles, les six coordonnées x_i vérifient l'équation (33). La congruence admet donc un complexe linéaire osculateur.

73. Mais ce cas n'est pas le seul.

Prenons, par exemple, une congruence G contenue dans un complexe linéaire. Les deux surfaces focales sont polaires réciproques par rapport à ce complexe. En effet, soit Δ une droite de la congruence et (F, Φ), (F', Φ') les couples focaux. Le couple (F, Φ') est le faisceau plan osculateur de la courbe C tracée sur la surface S (nº 66); ce faisceau plan appartient donc au complexe linéaire, attendu que les tangentes de C appartiennent à ce complexe (nº 53). Le plan Φ' est ainsi

le plan polaire de F dans le complexe; pareillement, le plan Φ est le plan polaire de F'. Les deux faisceaux plans (F, Φ), (F', Φ') sont polaires l'un de l'autre et, par suite, les deux surfaces focales S et S' qu'ils enveloppent sont polaires l'une de l'autre par rapport au complexe.

Il y a même plus : lorsque le point F décrira sur S une courbe ou, plus exactement, lorsque le faisceau plan (F, Φ) décrira un *bandeau* circonscrit à S, le faisceau plan (F', Φ') décrira le bandeau réciproque circonscrit à S'. Si, en particulier, le bandeau est un bandeau asymptotique de S, c'est-à-dire un bandeau dans lequel le lieu du point F est une asymptotique de S, le bandeau correspondant de S' sera également asymptotique. Cela tient à ce que, par dualité, les bandeaux asymptotiques d'une surface se transforment dans ceux de la surface transformée.

Autrement dit, les asymptotiques se correspondent sur les surfaces focales.

Cette propriété remarquable est générale, ainsi que l'a montré M. G. Darboux, et les considérations précédentes permettent d'en donner une démonstration immédiate.

Soit une congruence G, qui admet, suivant sa droite x, un complexe linéaire osculateur C_x; soit S une surface focale, et considérons les tangentes de S qui font partie du complexe C_x. J'appelle S_1 la polaire réciproque de S dans le complexe C_x, la surface S_1 sera la seconde surface focale de la congruence G_1 des droites tangentes à S qui font partie de C_x; soit enfin S' la seconde surface focale de la congruence G. Autour de la droite x, les congruences G et G_1 coïncident jusqu'aux propriétés qui dépendent du troisième ordre. Les deux surfaces focales S' et S_1 doivent donc être tangentes au point F' où x touche S' et, de plus, les éléments du second ordre de S' et S_1 doivent être les mêmes autour de F'. Les tangentes asymptotiques de S' et de S_1 doivent coïncider.

Mais si F se déplace sur une tangente asymptotique de S, F' se déplace sur S_1 suivant une tangente asymptotique, donc suivant une tangente asymptotique de S'. Il est ainsi établi que les déplacements asymptotiques sur S et S' se correspondent. Les asymptotiques de S et de S' se correspondent donc.

Nous aurons occasion de revenir sur cette question.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SIXIÈME.

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

FIN DU TOME SIXIÈME.

18163 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.




Stanford University Libraries
3 6105 010 229 446

